NÂNG CAO KỸ NĂNG

100%

DẠNG BÀI

MG27

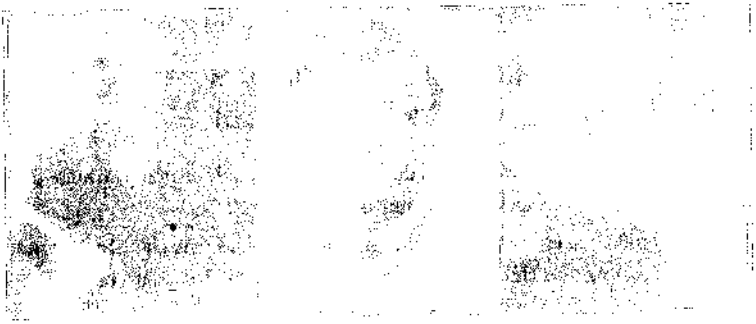
TÔ THỊ NGA

NÂNG CAO KỸ NĂNG

- Bí quyết ôn nhanh, nhớ lâu qua lời giải chi tiết
- Bật phá tư duy làm bài, đầy đủ dạng bài tập.
- Dành cho học sinh luyện thi THPT Quốc gia

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

THAY LỜI NÓI ĐẦU



TRẮC NGHIỆM TOÁN - MỘT LỐI TƯ DUY MỚI

Thân gửi lời yêu thương đến toàn thể các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô giáo!

Như mọi người đã biết, nền giáo dục của đất nước chúng ta đang thay đổi từng ngày để kịp thích nghi với xu hướng giáo dục tiến bộ trên thế giới. Lần đầu tiên giáo dục Việt Nam, môn Toán được thi dưới hình thức trắc nghiệm.

Thực tế cho thấy, tại nhiều quốc gia có nền giáo dục phát triển trên thế giới, hình thức này đã được áp dụng từ lâu. Chẳng hạn trong bài thi SAT và ACT của Mỹ có khoảng 50 câu hỏi trắc nghiệm, và việc thi Toán trắc nghiệm ở quốc gia này hàng năm vẫn thu hút được hàng triệu lượt thí sinh tham gia ứng tuyển vào khoảng 1800 trường Đại học tại Hoa Kỳ.

Tuy nhiên ở Việt Nam, phải đến năm 2017 hình thức này mới được cập nhật và áp dụng lần đầu tiên cho kỳ thi THPT Quốc gia. Do đây là năm đầu tiên áp dụng hình thức thi này nên rất nhiều em học sinh chưa kịp thích nghi, rơi vào trạng thái hoang mang; còn các thầy cô cũng gặp nhiều khó khăn khi phải xoay xở cách dạy học, cách ra đề mới. Hơn thế, tài liệu về trắc nghiệm Toán trên thị trường còn khan hiếm, gần như không thể đáp ứng được nhu cầu khổng lồ trên.

Chính vì thế Megabook cùng đội ngũ tác giả đã dày công nghiên cứu cho ra dời Bộ sách này. Đây là Bộ sách về trắc nghiệm Toán đầu tiên ở Việt Nam với 100% dạng bài trắc nghiệm. Mọi hệ thống lý thuyết cũng như các dạng bài tập được biên soạn lại và chọn lọc kỹ càng đảm bảo giúp các em học sinh có thể hình dung rõ ràng về dạng đề mới và luyện tập để một cách thành thạo nhất.

Đây có thể không phải là cuốn sách hay nhất, nhưng chắc chắn là cuốn sách phù hợp nhất cho những ai muốn dạy tốt và học tốt trắc nghiệm Toán, những ai muốn đỗ kỳ thi THPT Quốc gia với điểm Toán vượt trội, và hơn hết là với những ai muốn hiểu thật rõ, hiểu thật sâu bản chất môn Toán để học thật, thi thật và sống thật.

Thân ái gửi tặng các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô Bộ sách tâm huyết này!

ĐỘI NGŨ TÁC GIẢ.

**Dành cho những ai muốn thành công
và hạnh phúc trước tuổi 35 !**

MỤC TIÊU LÀ KIM CHỈ NAM DẪN ĐƯỜNG CHÚNG TA ĐI

Khởi đầu cho mỗi chặng đường cần có động lực để bước đi, để có động lực bước đi thì mục tiêu chính là ngòi nổ để thúc đẩy sự chinh phục đầy thú vị.

Các em thân mến, các em đã tự hỏi xem mình đã có "ngòi nổ" nào cho năm học mới chưa? Cho việc học Toán cũng như chinh phục cuốn sách trắc nghiệm Toán này chưa? Và xa hơn là chặng đường cho cuộc sống 5 năm tới nữa chưa?

Cho dù có hoặc chưa có trong tâm trí một mục tiêu thì chỉ cần các em viết ra, viết ra những mục tiêu của bản thân thì nó sẽ trở nên rõ ràng hơn rất nhiều. Bởi vì, "Sự rõ ràng tạo nên sức mạnh!" Các em chỉ đến được ĐÍCH một khi các em biết mình đang muốn đi đến đâu, trở thành ai, đạt được điều gì sau 1 năm, 2 năm, 5 năm nữa?

Vậy nên hãy dành 30 phút để hình dung, tưởng tượng về cái ĐÍCH đó rồi viết ra em nhé.

NGUYÊN HÀM

NGUYÊN HÀM
VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khái niệm nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) xác định trên K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \in K$.

Ví dụ

Hàm số $F(x) = \frac{x^5}{5}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ trên $\mathbb{R}$, vì $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $F(x) = \cot x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ trên $(0;\pi)$, vì $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ với $\forall x \in (0;\pi)$.

Hàm số $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ vì $F'(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in [0;+\infty)$.

Định lí

Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó:

i) Với mỗi hằng số C, hàm số y = F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f trên K.

ii) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với $\forall x \in K$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện F(1) = -2.

Giải:

Dễ thấy $y = x^5$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4$ nên nguyên hàm F cần tìm có dạng $F(x) = x^5 + C$.

Vì F(1) = -2 nên $1^5 + C = -2 \Leftrightarrow 1 + C = -2 \Leftrightarrow C = -3$.

Vậy $F(x) = x^5 - 3$.

Từ định lí ta thấy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng F(x) + C với $C \in \mathbb{R}$. Vậy F(x) + C, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K.

Ví dụ 5 • $F(x) = \sin x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Mọi nguyên hàm của f(x) trên $\mathbb{R}$ đều có dạng: sinx + C với $C \in \mathbb{R}$.

Kí hiệu

Họ tất cả các nguyên hàm của f trên K được kí hiệu là: $\int f(x)dx$.

Vậy $\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Người ta cũng dùng kí hiệu $\int f(x)dx$ để chỉ một nguyên hàm bất kì của f.

Vậy: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Chú ý: Mọi hàm số f(x) liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Sau đây là nguyên hàm của một số hàm số đơn giản thường gặp.

$$\int 0dx = C;\ \int dx = x + C;$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ \ (0 < a \neq 1)$$

Với k là hằng số khác 0 thì:

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C;\ \int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C;\ \int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C.$$

Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm:

a) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

b) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\ \ (k \neq 0)$

Ví dụ 6 • Tìm:

a) $\int\left(3x^2+\dfrac{x}{5}\right)dx.$

b) $\int\cos^2 x dx.$

Giải:

a) $\int\left(3x^2+\dfrac{x}{5}\right)dx=\int 3x^2dx+\int\dfrac{x}{5}dx=3\int x^2dx+\dfrac{1}{5}\int xdx=3.\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{5}.\dfrac{x^2}{2}+C$

$=x^3+\dfrac{x^2}{10}+C.$

b) $\int\cos^2 xdx=\int\dfrac{\cos 2x+1}{2}dx=\dfrac{1}{2}\int\cos 2xdx+\dfrac{1}{2}\int dx=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{1}{2}x+C$

$=\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{x}{2}+C.$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Xác định nguyên hàm bằng việc sử dụng bảng các nguyên hàm cơ bản

1.1. Kiến thức cơ bản

Bảng các nguyên hàm cơ bản

$\int 0dx=C$	$\int a^xdx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ \ 0<a\neq 1$
$\int dx=x+C$	$\int\cos xdx=\sin x+C$
$\int x^\alpha dx=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq -1)$	$\int\sin xdx=-\cos x+C$
$\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$
$\int e^xdx=e^x+C$	$\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$

Ví dụ • Tính: $I=\int\left(2\sin x-5^{x-1}\right)dx.$

Giải:

Ta có: $I=2\int\sin xdx-\int 5^{x-1}dx=-2\cos x-5\int 5^xdx=-2\cos x-5.\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$

$=-2\cos x-\dfrac{5^{x+1}}{\ln 5}+C.$

1.2. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

Khẳng định 1: $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Khẳng định 2: $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

Khẳng định 3: $\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dx.\int g(x)dx$.

Khẳng định 4: $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$.

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Các khẳng định 1, 2 và 4 đúng; 3 sai $\Rightarrow$ Có tất cả 3 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 2 Có bao nhiêu khẳng định SAI trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 4; **(D)** 3.

Khẳng định 1: $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Khẳng định 2: Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Khẳng định 3: $\int f(x)dx=\int g(x)dx\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Khẳng định 4: $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (trong đó tồn tại $f'(x),g'(x)$)

Giải:

Khẳng định 1 và 2 đúng.

Xét khẳng định 3:

Nếu f(x) = g(x) thì $\int f(x)dx=\int g(x)dx$.

Nếu $\int f(x)dx=\int g(x)dx$ thì:

$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=0\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

$\Rightarrow$ Khẳng định 3 đúng.

Xét khẳng định 4:

Nếu $f(x)=g(x)$ thì $f'(x)=g'(x)$.

Nếu $f'(x)=g'(x)$ thì $\left[f(x)-g(x)\right]'=0\Leftrightarrow f(x)-g(x)=C$ (C là hằng số)

$\Rightarrow$ Khẳng định 4 sai.

$\Rightarrow$ Có tất cả 1 khẳng định sai

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 3 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.

(A) $\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$; **(B)** $\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$;

(C) $\int f(x)dx = 3x^2 - 3 - \frac{1}{x^2} + C$; **(D)** $\int f(x)dx = x^4 - 3x^2 + \ln x + C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int\left(x^3 - 3x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^3dx - 3\int xdx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4} - 3.\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn** (A).

Lưu ý:

1. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

2. Đối với bài toán nguyên hàm như thế này các bạn có thể dùng máy tính để thử 4 đáp án cho mọi bài toán.

Chú ý cách làm này đôi khi mất nhiều thời gian hơn rất nhiều so với việc tính bằng tay, do đó các em nên tham khảo và lựa chọn cho mình cách làm tối ưu nhất.

Tác giả trình bày mẫu một bài, các em có thể sử dụng để làm các bài toán có nội dung tương tự.

Cách làm như sau:

Cơ sở của phương pháp:

Ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(100) = f(100)$

Do đó $\frac{d}{dx}(F(x))\Big|_{x=X} - f(x)$ CALC $X = X_0$ $(X_0 = 100; X_0 = 10000, X_0 = ...)$

Sẽ được kết quả bằng 0 đôi khi là xấp xỉ 0 (do máy tính có chức năng làm tròn).

Chú ý: Với bài toán chứa hàm số lượng giác các bạn chuyển chế độ sang Radian bằng tổ hợp phím SHIFT MODE 4.

Cách thử với 4 đáp án đề bài cho ở bài này như sau:

Với đáp án A nhập: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x|\right)\Big|_{x=X} - \left(X^3 - 3X + \frac{1}{X}\right)$ CALC 100 = $-2,34.10^{-7} \approx 0$ (số này là số rất nhỏ nên ta có thể tin tưởng đáp án này là đáp án đúng vì đôi khi máy tính làm tròn số). Để chắc chắn các em có thể CALC thêm vô số các giá trị tuỳ thích.

Tương tự thử với C và D.

Chú ý đáp án B sai vì $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

Thử với đáp án C:

$\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 3 - \frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=X} - \left(X^3 - 3X + \frac{1}{X}\right)$ CALC 100 = −9991000,01 nên C sai.

Tương tự như vậy D sai.

Bài tập 4 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

(A) $\int f(x)dx = \ln x - \frac{2}{x} + C$;

(B) $\int f(x)dx = \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} + C$;

(C) $\int f(x)dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + C$;

(D) $\int f(x)dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{x-2}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x^2}dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Kiểm tra từng đáp án.

Với đáp án C. Nhập $\frac{d}{dx}\left(\ln|X| + \frac{2}{X}\right)\Big|_{x=X} - \frac{X-2}{X^2}$ CALC 100 $= 1,4.10^{-14} \approx 0$. Chọn C.

Bài tập 5 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 5}{x^2}$.

(A) $\int f(x)dx = x^2 + \frac{5}{x} + C$;

(B) $\int f(x)dx = x^2 - \frac{5}{x} + C$;

(C) $\int f(x)dx = x^3 - \frac{5}{x} + C$;

(D) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{2x^3 + 5}{x^2}dx = \int\left(2x + \frac{5}{x^2}\right)dx = 2\int xdx + 5\int \frac{1}{x^2}dx = 2.\frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + C$

$= x^2 - \frac{5}{x} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Kiểm tra từng đáp án.

Với đáp án B. Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^2 - \frac{5}{X}\right)\Big|_{x=X} - \frac{2X^3 + 5}{X^2}$ CALC 100 $= 2,02.10^{-14} \approx 0$. Chọn B.

Bài tập 6 Tính $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}dx$, kết quả SAI là:

(A) $\frac{x^3}{3}+2(x+1)-\frac{1}{x}+C$;

(B) $\frac{x^3+1}{3}+2(x+1)-\frac{1}{x}+C$;

(C) $\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C$;

(D) $\frac{x^3}{3}+2x-\frac{2}{x}+C$.

Giải:

Ta có: $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}dx=\int \frac{x^4+2x^2+1}{x^2}dx=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int x^2dx+2\int dx+\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+C.$

Các kết quả ở các phương án (A), (B), (C) và đáp số hơn kém nhau một hằng số nên (A), (B), (C) đúng. (D) sai.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 7 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}$.

(A) $\int f(x)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{4}{3}}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$;

(B) $\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{5}{4}}+C$;

(C) $\int f(x)dx=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+C$;

(D) $\int f(x)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{4}{3}}-\frac{5}{2}x^{\frac{5}{4}}+C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{4}}\right)dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{4}{3}}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Trong bài này để hàm số f(x) xác định thì $x\geq 0$. Khi đó $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

Bài tập 8 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x}$.

(A) $\int f(x)dx=x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$;

(B) $\int f(x)dx=x-4\sqrt{x}+\ln x+C$;

(C) $\int f(x)dx=x+2\sqrt{x}+\ln|x|+C$;

(D) $\int f(x)dx=x-2\sqrt{x}+\ln x+C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x}dx = \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx = \int\left(1+2.x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \frac{1}{x}dx = x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 9 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$.

(A) $\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^{\frac{5}{2}} + C;$ **(B)** $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C;$

(C) $\int f(x)dx = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C;$ **(D)** $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 10 Nếu F(x) là tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}$ thì

(A) $F(x) = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2} + C;$ **(B)** $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C;$

(C) $F(x) = \sin x + x + C;$ **(D)** $F(x) = x - \sin x + C.$

Giải:

Ta có: $F(x) = \int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{\cos x + 1}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos x dx + \int dx\right)$

$= \frac{1}{2}(\sin x + x) + C = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhắc lại:

+ Công thức hạ bậc đối với hàm số cos: $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$.

+ Công thức hạ bậc đối với hàm số sin: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

+ Có thể sử dụng Casio như sau:

Thử 4 đáp án. Đây là bài toán chứa hàm số lượng giác.

Bước 1: Chuyển máy tính sang chế độ Radian.

Bước 2: Thử 4 đáp án $\frac{d}{dx}\left(\frac{X}{2}+\frac{\sin X}{2}\right)\Big|_{x=X}-\cos^2\frac{X}{2}$ CALC 100 $=7.69.10^{-13}\approx 0$.

Chọn A.

Bài tập 11 Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 x$ là:

(A) $F(x)=\cot x-x+C$;

(B) $F(x)=-\tan x-x+C$;

(C) $F(x)=\tan x-x+C$;

(D) $F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int \tan^2 x dx=\int\left[\left(\tan^2 x+1\right)-1\right]dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx$

$=\tan x-x+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhắc lại: Công thức biểu diễn $\tan^2 x$ theo $\cos^2 x$; $\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Bài tập 12 Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan x$ là:

(A) $F(x)=\ln|\cos x|+C$;

(B) $F(x)=\ln(\cos x)+C$;

(C) $F(x)=-\ln|\sin x|+C$;

(D) $F(x)=-\ln|\cos x|+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 13 Nếu F(x) là tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\cot x}{\sin^3 x}$ thì:

(A) $F(x)=-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$;

(B) $F(x)=-\frac{1}{3\cos^3 x}+C$;

(C) $F(x)=\frac{\cos x}{3\sin^2 x}+C$;

(D) $F(x)=-\frac{\cos x}{\sin^4 x}+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\frac{\cot x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^4 x}=-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 14 Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(1-e^{-x}+e^{2x}\right)$ là:

(A) $F(x)=e^x\left(x-e^x+\dfrac{e^{2x}}{2}\right)+C$; (B) $F(x)=e^x-x+\dfrac{e^{3x}}{3}+C$;

(C) $F(x)=e^x-x+3e^{3x}+C$; (D) $F(x)=e^x-x+\dfrac{e^{3x}}{3}+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int e^x\left(1-e^{-x}+e^{2x}\right)dx=\int\left(e^x-1+e^{3x}\right)dx=\int e^xdx-\int dx+\int e^{3x}dx$

$=e^x-x+\dfrac{e^{3x}}{3}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Hàm số $y=e^x$ bất biến qua phép lấy nguyên hàm và đạo hàm.

Bài tập 15 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}+2}$ là:

(A) $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\left(e^x+e^{-x}+2\right)}+C$; (B) $F(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}+C$;

(C) $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+C$; (D) $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\sqrt{e^x+e^{-x}+2}\,dx=\int\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}dx=\int\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 16 Trong các hàm số sau, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$?

(A) $F(x)=\ln\left|1+x^2\right|$; (B) $F(x)=-\ln\left(1+x^2\right)+1$;

(C) $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+2$; (D) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Vì $1+x^2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $\ln\left|1+x^2\right|=\ln\left(1+x^2\right)$.

Bài tập 17 Nếu $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$ thì $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$; (B) $-\frac{3}{2}$; (C) 3; (D) $\frac{4}{3}$.

Giải:

Ta có: $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x-1)dx + \int_{0}^{3}(x^2-2)dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Big|_{0}^{3} = -\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 18 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a(x^2+2) & \text{khi } x\ge 0 \\ -x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Tìm a, biết $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 3.$

(A) $a=\frac{9}{2}$; (B) $a=\frac{27}{14}$;

(C) $a=\frac{9}{14}$; (D) $a=\frac{3}{7}$.

Giải:

Ta có: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(-x+1)dx + \int_{0}^{1} a(x^2+2)dx$

$=\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0} + a\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{3}{2}+\frac{7a}{3}.$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{7a}{3}=3 \Leftrightarrow a=\frac{9}{14} \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 19 Tìm số thực m để hàm số $F(x)=mx^4+(2m+1)x^2-3x+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+6x-3$?

(A) m = -1; (B) m = 0; (C) m = 1; (D) m = 2.

Giải:

Để F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì $F'(x)=f(x)$

$\Leftrightarrow 4mx^3+2(2m+1)x-3=4x^3+6x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m=4 \\ 2(2m+1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

$\Rightarrow$ Chọn (C).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập $\frac{d}{dx}\left(MX^4+(2M+1)X^2-3X+1\right)\Big|_{x=X}-\left(4X^3+6X-3\right)$

CALC M (ta sẽ CALC với M được cho ở 4 đáp án). Sau đó máy tính tiếp tục hiện X?

Chúng ta CALC với $X=100$.

Ở đáp án C ta có $m=1$; $X=100$ kết quả máy tính cho bằng 0. **Chọn C.**

Bài tập 20 Trong các hàm số sau, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$?

(A) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|-2$;

(B) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$;

(C) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|(x-3)(x-1)\right|+1$;

(D) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|-3$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln|x-3|-\ln|x-1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 21 Trong các hàm số sau đây:

$F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)^2}+1$; $H(x)=\frac{2}{3}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}$; $G(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)^2}+\frac{1}{2}$,

hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt[3]{\sin x+\cos x}}$?

(A) H(x);

(B) H(x) và G(x);

(C) H(x) và F(x);

(D) F(x) và G(x).

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt[3]{\sin x+\cos x}}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x+\cos x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x+\cos x)^2}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 22 Tính $I=\int\left(\sin 6x+\sqrt{x}+\frac{4}{5}\right)dx$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{\cos 6x}{6}+\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}x+C$;

(B) $I=-\frac{\cos 6x}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}x+C$;

(C) $I=\frac{\cos 6x}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}x+C$;

(D) $I=-\frac{\cos 6x}{6}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{5}x+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int \sin 6x dx+\int \sqrt{x}dx+\frac{4}{5}\int dx=-\frac{\cos 6x}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}x+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

C. Tăng tốc

Bài tập 23 Tính $I=\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C;$

(B) $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+C;$

(C) $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C;$

(D) $I=\sqrt{2}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}.$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$. Khi đó: $I=\int \frac{dt}{t^2-2}=\int \frac{dt}{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|t-\sqrt{2}\right|-\ln\left|t+\sqrt{2}\right|\right)+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 24 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ là:

(A) $F(x)=-\ln|\tan x|+C;$

(B) $F(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+C;$

(C) $F(x)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C;$

(D) $F(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+C.$

Giải:

Ta có: $F(x)=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 25 Tính nguyên hàm $I=\int \frac{dx}{3^x-3^{-x}}$ được kết quả là:

(A) $I=\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C$;

(B) $I=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x+1}{3^x-1}\right|+C$;

(C) $I=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C$;

(D) $I=\ln\left|\frac{3^x}{3^{2x}-1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{3^x}{3^{2x}-1}dx$.

Đặt $3^x=t \Rightarrow 3^x\ln 3dx=dt$.

Khi đó: $I=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\frac{1}{2\ln 3}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|\right]+C=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

D. Về đích

Bài tập 26 Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x\ln x.\ln(\ln x)}$?

$F(x)=\ln(\ln x)+3$; $G(x)=\ln\left[\ln(\ln x)\right]-\frac{1}{2}$; $H(x)=\ln\left[\ln(\ln x)\right]+5$

(A) F(x);

(B) F(x) và G(x);

(C) F(x) và H(x);

(D) G(x) và H(x).

Giải:

Vì $d\left[\ln(\ln x)\right]=\frac{dx}{x\ln x}$ nên $\int f(x)dx=\int\frac{1}{x\ln x.\ln(\ln x)}dx=\int\frac{d\left[\ln(\ln x)\right]}{\ln(\ln x)}$

$=\ln\left[\ln(\ln x)\right]+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 27 Tính $I=\int(2e^x+1)^5e^xdx$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{(2e^x+1)^6}{12}+C$;

(B) $I=\frac{(2e^x+1)^6}{6}+C$;

(C) $I=5(2e^x+1)^4+C$;

(D) $I=\frac{5}{2}(2e^x+1)^4+C$.

Giải:

Ta có: $I=\frac{1}{2}\int\left(2e^x+1\right)^5 d\left(2e^x+1\right)=\frac{1}{2}.\frac{\left(2e^x+1\right)^6}{6}+C=\frac{\left(2e^x+1\right)^6}{12}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 28 Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$. Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG?

(A) Nguyên hàm của hàm số f(x) là $F(x)=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}\right)+C.$

(B) Hàm số f(x) có nguyên hàm là $F(x)=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}\right)+C$ khi $x<-1$.

(C) Nguyên hàm của hàm số f(x) là $F(x)=2\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right|+C.$

(D) Hàm số f(x) có một nguyên hàm là $F(x)=2\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right|$ với mọi x thuộc tập xác định.

Giải:

Điều kiện: $x(1+x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-1\end{array}\right.$.

Xét 2 trường hợp:

- *Trường hợp 1:* $x>0$. Khi đó, ta có: $I=\int\frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}}$

Đặt $t=\sqrt{x}$. Khi đó: $I=2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=2\int d\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C$

$=2\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right|+C.$

- *Trường hợp 2:* $x<-1$. Khi đó, ta có: $I=\int\frac{1}{\sqrt{-x}.\sqrt{-x-1}}dx=-2\int\frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{-x}}$

$=-2\int\frac{d\left(\sqrt{-x-1}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{-x-1}\right)^2+1}}=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}\right)+C.$

$\Rightarrow$ **(B)** đúng; **(A)**, **(C)** và **(D)** sai.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Đối với bài này chúng ta nhất thiết phải xét cả 2 trường hợp như trên, tránh nhầm lẫn chỉ xét trường hợp 1 mà không xét trường hợp 2.

2. Xác định nguyên hàm bằng phương pháp phân tích

2.1. Phương pháp

Sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành tổng các hạng tử mà nguyên hàm của mỗi hạng tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết.

2.2. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Cho $I=\int\left(x^3-3x^2+x\right)dx$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Khẳng định 1: $I=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+C$.

Khẳng định 2: $I=\frac{x^4+1}{4}-x^3+\frac{x^2+1}{2}+C$.

Khẳng định 3: $I=\frac{x^4+1}{4}-(x+1)^3+\frac{x^2+1}{2}+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int x^3dx-3\int x^2dx+\int xdx=\frac{x^4}{4}-3.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+C$.

Ta có: $\frac{x^4+1}{4}-x^3+\frac{x^2+1}{2}+C=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+C_1$

Khẳng định 1 và 2 đúng.

$\frac{x^4+1}{4}-(x+1)^3+\frac{x^2+1}{2}+C=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}-3x^2-3x+C_2\Rightarrow$ Khẳng định 3 sai.

$\Rightarrow$ Có tất cả 2 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 2 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$ là hàm số:

(A) $F(x)=4x^3-4x+C$;

(B) $F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C$;

(C) $F(x)=\frac{\left(x^2-1\right)^3}{3}+C$;

(D) $F(x)=5x^5-6x^3+x+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\left(x^4-2x^2+1\right)dx=\frac{x^5}{5}-2.\frac{x^3}{3}+x+C=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 3 Trong các hàm số $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|-\frac{1}{2}$, $G(x)=\frac{1}{3}\ln\left|(x-4)(x-1)\right|$, $H(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+3$, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+4}$?

(A) H(x);

(B) H(x) và F(x);

(C) H(x) và G(x);

(D) F(x) và G(x).

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-4)}dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-4}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx$

$= \frac{1}{3}\ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 4 Tìm: $I = \int (2^x + 5^x)^2 dx.$

Giải:

Ta có: $I = \int (2^{2x} + 2.2^x.5^x + 5^{2x})dx = \int 4^x dx + 2\int 10^x dx + \int 25^x dx$

$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2.\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 5 Tìm: $I = \int \sin^3 x dx.$

(A) $I = \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x + C;$

(B) $I = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$

(C) $I = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C;$

(D) $I = -\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos 3x + C.$

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}dx = \frac{3}{4}\int \sin x dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}.\frac{1}{3}\cos 3x + C$

$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C;$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhắc lại: Các công thức hạ bậc cần nhớ lại: $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

Bài tập 6 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8\sin^3 x.\cos x$ là:

(A) $\int f(x)dx = -\cos 2x + \frac{\cos 4x}{4} + C;$

(B) $\int f(x)dx = -2\cos 2x + \cos 4x + C;$

(C) $\int f(x)dx = \cos 2x - \frac{\cos 4x}{4} + C;$

(D) $\int f(x)dx = 2\cos 2x - \cos 4x + C.$

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int 8\sin^3 x.\cos x dx = \int 2(3\sin x - \sin 3x).\cos x dx$

$= \int (3.2.\sin x.\cos x - 2\sin 3x.\cos x)dx$

$= \int (3\sin 2x - \sin 4x - \sin 2x)dx = \int (2\sin 2x - \sin 4x)dx$

$= -\cos 2x + \dfrac{\cos 4x}{4} + C \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể tính nguyên hàm của hàm số f(x) như sau:

$\int f(x)dx = \int 8\sin^3 x.\cos x dx = \int 8\sin^3 x d(\sin x) = 2\sin^4 x + C$. Và lưu ý bằng phép hạ bậc có thể đưa $2\sin^4 x$ về $-\cos 2x + \dfrac{\cos 4x}{4}$.

Bài tập 7 Tính $I = \int \dfrac{1}{1+e^x}dx$ được kết quả là:

(A) $I = -\ln(1+e^x) + C$; **(B)** $I = x + \ln(1+e^x) + C$;

(C) $I = x - \ln(1+e^x) + C$; **(D)** $I = x - \dfrac{e^x}{1+e^x} + C$.

Giải:

Ta có: $I = \int \dfrac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \dfrac{e^x}{1+e^x}dx = x - \int \dfrac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 8 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{4x^2+6x+1}{2x+1}$ là hàm số:

(A) $F(x) = x^2 + 2x - \ln|2x+1| + C$; **(B)** $F(x) = 2x^2 + 2x - \ln|2x+1| + C$;

(C) $F(x) = x^2 + 2x - 2\ln|2x+1| + C$; **(D)** $F(x) = x^2 + 2x - \dfrac{\ln|2x+1|}{2} + C$.

Giải:

Ta có: $I = \int \left(2x + 2 - \dfrac{1}{2x+1}\right)dx = 2\int xdx + 2\int dx - \int \dfrac{dx}{2x+1} = 2\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{\ln|2x+1|}{2} + C$

$= x^2 + 2x - \dfrac{\ln|2x+1|}{2} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Để có được $\dfrac{4x^2+6x+1}{2x+1} = 2x + 2 - \dfrac{1}{2x+1}$ chúng ta đã thực hiện phép chia đa thức $P(x) = 4x^2 + 6x + 1$ cho đa thức $Q(x) = 2x + 1$.

C. Tăng tốc

Bài tập 9 Trong các hàm số sau, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot^3 x$?

(A) $F(x) = \dfrac{\cot^4 x}{4} + C$; **(B)** $H(x) = -\dfrac{\cot^4 x}{4} + C$;

(C) $G(x) = -\dfrac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$; **(D)** $K(x) = -\dfrac{\cot^2 x}{2} - \ln(\sin x) + C$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \cot^2 x.\cot xdx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\cot xdx = \int \cot x.\frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \cot xdx$

$= -\int \cot xd(\cot x) - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 10 Trong các hàm số sau đây:

(I) $f(x) = -\cot^2 x - 2$, (II) $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, (III) $f(x) = -\cot^2 x - 1$

Hàm số nào có một nguyên hàm là $F(x) = \cot x$?

(A) (I); **(B)** (II);

(C) (II) và (III); **(D)** (I) và (II).

Giải:

Ta có: $F'(x) = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cot^2 x - 1 \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 11 Tính $I = \int x(1-x)^{2017} dx$ được kết quả là:

(A) $I = -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C;$

(B) $I = -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + C;$

(C) $I = -2017(1-x)^{2016} + 2018(1-x)^{2017} + C;$

(D) $I = -2018(1-x)^{2018} + 2019(1-x)^{2019} + C.$

Giải:

Ta có: $I = \int[1-(1-x)](1-x)^{2017} dx = \int(1-x)^{2017} dx - \int(1-x)^{2018} dx$

$= -\int(1-x)^{2017} d(1-x) + \int(1-x)^{2018} d(1-x)$

$= -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 12 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x} - \sqrt{3x-1}}$.

(A) $\int f(x)dx = 2x\sqrt{3x} + \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{3} + C.$

(B) $\int f(x)dx = \frac{2x}{3}\sqrt{3x} + \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{9} + C.$

(C) $\int f(x)dx = \frac{3}{2\sqrt{3x}} + \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} + C.$

(D) $\int f(x)dx = \frac{2x}{9}\sqrt{3x} + \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{27} + C.$

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3x-1}\right)dx = \int\sqrt{3x}dx + \int\sqrt{3x-1}dx$

$= \frac{1}{3}\int(3x)^{\frac{1}{2}}d(3x) + \frac{1}{3}\int(3x-1)^{\frac{1}{2}}d(3x-1) = \frac{2x}{3}\sqrt{3x} + \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{9} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Cần linh hoạt lựa chọn nhân cả tử thức và mẫu thức với biểu thức liên hợp của $\sqrt{3x} - \sqrt{3x-1}$ để đưa bài toán về dạng tính nguyên hàm bằng việc sử dụng các nguyên hàm cơ bản.

Bài tập 13 Tìm nguyên hàm: $I = \int\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)dx.$

(A) $I = x + \frac{3}{8}\sin 4x + C;$

(B) $I = x - \frac{\sin^3 2x}{4} + C;$

(C) $I = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C;$

(D) $I = \frac{\sin^7 x - \cos^7 x}{7} + C.$

Giải:

Ta có: $I = \int\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\left(\sin^2 x\right)^2\cos^2 x - 3\left(\cos^2 x\right)^2\sin^2 x\right]dx$

$= \int\left[1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\right]dx = \int\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx$

$= \int\left[1 - \frac{3}{8}(1-\cos 4x)\right]dx = \frac{5}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int\cos 4x dx$

$= \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}.\frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Sử dụng hằng đẳng thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ để hạ bậc $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Bài tập 14 Hàm số nào trong các hàm số sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$?

(A) $F(x) = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C;$

(B) $H(x) = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + C;$

(C) $G(x) = \frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + C;$

(D) $K(x) = -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + C.$

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int\left(\cot^2 x + 1\right)d(\cot x)$

$$= -\int \cot^2 x\,d(\cot x) - \int d(\cot x) = -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 15 Tính $I = \int x\sqrt{2-5x}\,dx$ được kết quả là:

(A) $I = -\frac{4}{75}(2-5x)\sqrt{2-5x} + \frac{2}{125}(2-5x)^2\sqrt{2-5x} + C.$

(B) $I = -\frac{1}{5}(2x-5)\sqrt{2x-5} + C.$

(C) $I = -\frac{2}{3}(2x-5)\sqrt{2x-5} + C.$

(D) $I = -\frac{4}{3}(2-5x)\sqrt{2-5x} - \frac{2}{5}(2-5x)^2\sqrt{2-5x} + C.$

Giải:

Ta có: $I = \int\left[\frac{2-(2-5x)}{5}\right]\sqrt{2-5x}\,dx = \frac{2}{5}\int\sqrt{2-5x}\,dx - \frac{1}{5}\int(2-5x)\sqrt{2-5x}\,dx$

$$= \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\int(2-5x)^{\frac{1}{2}}d(2-5x) - \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\int(2-5x)^{\frac{3}{2}}d(2-5x)$$

$$= \frac{-2}{25}\cdot\frac{2}{3}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{25}\cdot\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{4}{75}(2-5x)\sqrt{2-5x} + \frac{2}{125}(2-5x)^2\sqrt{2-5x} + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

D. Về đích

Bài tập 16 Trong các hàm số $F(x) = \ln\frac{x^2+1}{x^2+2} - 1$, $H(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + \frac{5}{2}$, $G(x) = 2\ln(x^2+1)(x^2+2) - 3$, hàm số là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^4+3x^2+2}$ là:

(A) F(x); **(B)** F(x) và H(x);

(C) F(x) và G(x); **(D)** H(x).

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int\frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \int\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2}\right)dx = \int\frac{x}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{x^2+2}dx$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 17 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Khẳng định 1: $\int \frac{1}{\sin x.\cos^3 x}dx = \frac{1}{2}\left(\tan^2 x + 1\right) - \ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C.$

Khẳng định 2: $F(x) = 2\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$.

Khẳng định 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)}$ là $F(x) = \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$

Giải:

+ Xét khẳng định 1:

Ta có: $\int \frac{1}{\sin x.\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + \int \frac{1}{\sin x.\cos x}dx$

$= -\int \cos^{-3} x d(\cos x) + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x}dx = \frac{\cos^{-2} x}{2} + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= \frac{1}{2\cos^2 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\tan^2 x + 1\right) - \ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C.$

$\Rightarrow$ *Khẳng định 1* đúng.

+ Xét khẳng định 2: Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right) - x^2}{x\left(x^2+1\right)}dx$

$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

$\Rightarrow$ *Khẳng định 2* sai.

+ Xét khẳng định 3:

Ta có: $I = \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x\left(1+xe^x\right)}dx = \int \frac{d\left(xe^x\right)}{xe^x\left(1+xe^x\right)} = \int\left(\frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x}\right)d\left(xe^x\right)$

$= \int \frac{d\left(xe^x\right)}{xe^x} - \int \frac{d\left(1+xe^x\right)}{1+xe^x} = \ln\left|xe^x\right| - \ln\left|1+xe^x\right| + C = \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$

$\Rightarrow$ *Khẳng định 3* đúng.

Vậy có tất cả 2 khẳng định đúng

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

3. Xác định nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

3.1. Kiến thức cơ bản

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây:

Định lí: Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó, nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f(u)du = F(u) + C$ thì $\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$ (1)

Ví dụ 1 ▸ Tính: $I = \int (2x-1)^{2016} dx$.

Giải:

Ta có: $(2x-1)^{2016} dx = \frac{1}{2}(2x-1)^{2016}(2x-1)'dx = \frac{1}{2}(2x-1)^{2016} d(2x-1)$.

Đặt $u = u(x) = 2x - 1$.

Áp dụng công thức (1), ta có:

$$I = \int (2x-1)^{2016} dx = \int \frac{1}{2}(2x-1)^{2016} d(2x-1) = \int \frac{1}{2} u^{2016} du = \frac{1}{2}\int u^{2016} du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2017}u^{2017} + C = \frac{1}{4034}(2x-1)^{2017} + C$$

Ví dụ 2 ▸ Tính: $I = \int \cos(3x+2)dx$.

Giải:

Ta có: $\cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\cos(3x+2)(3x+2)'dx = \frac{1}{3}\cos(3x+2)d(3x+2)$

Đặt $u = 3x + 2$.

Áp dụng công thức (1), ta có:

$$I = \int \frac{1}{3}\cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C.$$

Ta xét hai bài toán về phương pháp đổi biến số.

▪ **Bài toán 1: Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1 để tìm** $I = \int f(x)dx$.

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Chọn $x = u(t)$, trong đó ta chọn $u(t)$ sao cho thích hợp.
- *Bước 2:* Lấy vi phân $dx = u'(t)dt$
- *Bước 3:* Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$.
- *Bước 4:* Khi đó: $I = \int g(t)dt$.

b) Ví dụ

Ví dụ 3 Tính: $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Giải:

Đặt $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$.

Khi đó: $I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt=\int\sqrt{\cos^2 t}.\cos tdt=\int|\cos t|\cos tdt=\int\cos^2 tdt$

$=\int\frac{\cos2t+1}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\int\cos2tdt+\int dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin2t}{2}+t\right)+C=\frac{\sin2t}{4}+\frac{t}{2}+C$

Lưu ý: Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos t>0\Rightarrow|\cos t|=\cos t$.

Lưu ý: Căn cứ vào các dấu hiệu dưới đây chúng ta có thể lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ **Dạng 1**:

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=\lvert a\rvert\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=\lvert a\rvert\cos t$ với $0\le t\le\pi$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ hoặc $x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=\lvert a\rvert\tan t$ với $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=\lvert a\rvert\cot t$ với $0<t<\pi$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a\cos2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t$

▪ **Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đổi biến số *dạng 2* để tìm** $I=\int f(x)dx$.

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Đặt $t=u(x)$, trong đó u(t) là hàm số mà ta chọn sao cho thích hợp, rồi xác định x = v(t) (nếu có thể).

- *Bước 2:* Xác định vi phân $dt = u'(x)dx$.
- *Bước 3:* Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$.
- *Bước 4:* Khi đó: $I = \int g(t)dt$.

b) Ví dụ

Ví dụ 1 Tính: $I = \int xe^{x^2}dx$.

Giải:

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C$.

Lưu ý: Căn cứ vào các dấu hiệu dưới dây chúng ta có thể lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ **Dạng 2:**

Dấu hiệu	Cách đặt
Hàm số có mẫu	t là mẫu số
Hàm số $f\left(x, \sqrt{\varphi(x)}\right)$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x + e}$	$t = \tan\frac{x}{2}$ (với $\cos\frac{x}{2} \neq 0$)
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Nếu $\begin{cases} x+a>0 \\ x+b>0 \end{cases}$ thì đặt $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Nếu $\begin{cases} x+a<0 \\ x+b<0 \end{cases}$ thì đặt $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

3.2. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ là hàm số

(A) $F(x) = \arccos x + C$; **(B)** $F(x) = \arcsin x + C$;

(C) $F(x) = \sin x + C$; **(D)** $F(x) = \cos x + C$.

Giải:

Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t dt$; $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos t dt}{\cos t} = dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int dt = t + C = \arcsin x + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Chuyển sang chế độ Radian. Chú ý trên máy tính arcsinx ta bấm SHIFT Sin X

Thử đáp án B. Nhập $\left.\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(X)\right)\right|_{x=X}-\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ CALC $x=0,5$ được kết quả $=-3,06.10^{-12}\approx 0$. Chọn B. Chú ý do $|x|<1$ nên bài toán này ta CALC $x=0,5$.

Bài tập 2 Cho $I=\int\sqrt{4-x^2}dx$. Nếu đặt $x=2\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ thì khẳng định SAI là

(A) $dx=2\cos tdt$;

(B) $\sqrt{4-x^2}dx=4\cos^2 tdt$;

(C) $I=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$;

(D) $I=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

Giải:

Đặt $x=2\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow dx=2\cos tdt;\ \sqrt{4-x^2}dx=\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\cos^2 tdt$.

Khi đó, $I=\int 4\cos^2 tdt=2\int(\cos 2t+1)dt=2\int\cos 2tdt+2\int dt=\sin 2t+2t+C$

Vì $x=2\sin t\Rightarrow\sin t=\frac{x}{2}\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

$\Rightarrow\sin 2t=2\sin t\cos t=2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

$\Rightarrow I=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$.

$\Rightarrow$ Các khẳng định A, B, C đúng; D sai

$\Rightarrow$ **Chọn** (D).

Lưu ý: Vì $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos t>0\Rightarrow\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{\cos^2 t}=2|\cos t|=2\cos t$.

Bài tập 3 Gọi hàm số F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ và F(0) = -2. Khi đó:

(A) $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt{(1+x^2)^3}-\frac{7}{2}$;

(B) $F(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-2$;

(C) $F(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-2$;

(D) $F(x)=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}-1$.

Giải:

Đặt x = tant, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\frac{\cos^3 tdt}{\cos^2 t}=\cos tdt$.

Khi đó, $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int\cos tdt=\sin t+C$.

Vì x = tant nên $x=\dfrac{\sin t}{\cos t}\Rightarrow \cos t=\dfrac{\sin t}{x}\Rightarrow \sin^2 t=x^2\cos^2 t$

$\Rightarrow \sin^2 t+\cos^2 t=1\Leftrightarrow \sin^2 t+\dfrac{\sin^2 t}{x^2}=1\Leftrightarrow \sin^2 t.\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1\Rightarrow \sin^2 t.\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)=1$

$\Leftrightarrow \sin^2 t=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow \sin t=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

$F(0)=-2\Leftrightarrow C=-2\Rightarrow F(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-2.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 4 Cho $I=\int(2x+1)^{2016}dx$. Nếu đặt $t=2x+1$ thì khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) $dt=2dx$;

(B) $I=\int t^{2016}dt$;

(C) $I=\dfrac{1}{2}.\dfrac{t^{2017}}{2017}+C$;

(D) $I=\dfrac{(2x+1)^{2017}}{4034}+C.$

Giải:

Đặt $t=2x+1\Rightarrow dt=2dx.$

Khi đó: $\int f(x)dx=\int(2x+1)^{2016}dx=\int t^{2016}\dfrac{dt}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{t^{2017}}{2017}+C=\dfrac{(2x+1)^{2017}}{4034}+C.$

$\Rightarrow$ Các khẳng định A, C, D là đúng; B là sai

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 5 Hàm số nào sau đây, là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$?

$F(x)=4\sqrt{1+\ln t}-4$; $H(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$; $G(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}-\dfrac{1}{3}.$

(A) F(x) và H(x);

(B) F(x) và G(x);

(C) F(x);

(D) H(x) và G(x).

Giải:

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow 2tdt=\dfrac{1}{x}dx.$

Khi đó: $I=\int 2t^2dt=2\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 6 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Khẳng định 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ là hàm số $F(x)=\ln(e^x+1)+C$.

Khẳng định 2: $F(x)=x^2+1-\ln(x^2+1)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Khẳng định 3: $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}-2\sqrt{e^x+1}+C$

Giải:

+ Xét *khẳng định 1:* Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$.

Khi đó: $\displaystyle\int f(x)dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(e^x+1)+C$.

$\Rightarrow$ *Khẳng định 1* đúng.

+ Xét *khẳng định 2:*

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Đặt $x^2+1=t\Rightarrow 2xdx=dt$.

Khi đó: $F(x)=\displaystyle\int\frac{(t-1)}{t}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{x^2+1}{2}-\frac{\ln(x^2+1)}{2}+C$.

$\Rightarrow$ *Khẳng định 2* sai.

+ Xét *khẳng định 3:*

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^x dx$.

Khi đó: $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}.e^x dx=\int\frac{t^2-1}{t}.2tdt=2\int(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}-2\sqrt{e^x+1}+C$. $\Rightarrow$ *Khẳng định 3* đúng.

$\Rightarrow$ Có tất cả 2 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 7 Cho $I=\displaystyle\int x(x-1)^{2017}dx$. Nếu đặt $t=x-1$ thì khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) $dt=dx$;

(B) $I=\displaystyle\int(t-1)t^{2017}dt$;

(C) $I=\displaystyle\int t^{2018}dt+\int t^{2017}dt+C$;

(D) $I=\dfrac{(x-1)^{2019}}{2019}+\dfrac{(x-1)^{2018}}{2018}+C$.

Giải:

Đặt $t=x-1\Rightarrow dt=dx$.

Khi đó: $I=\int (t+1)t^{2017}dt=\int \left(t^{2018}+t^{2017}\right)dt=\int t^{2018}dt+\int t^{2017}dt=\frac{t^{2019}}{2019}+\frac{t^{2018}}{2018}+C$

$=\frac{(x-1)^{2019}}{2019}+\frac{(x-1)^{2018}}{2018}+C.$

$\Rightarrow$ Các khẳng định A, C, D đúng; khẳng định B sai $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 8 Tính $I=\int \sin^5 xdx$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{\sin^6 x}{6}+C;$ **(B)** $I=\frac{\sin^6 x\cos x}{6}+C;$

(C) $I=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C;$ **(D)** $I=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$

Giải:

Ta có: $I=\int \sin^4 x.\sin xdx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2.\sin xdx.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx.$

Khi đó: $I=-\int \left(1-t^2\right)^2dt=-\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt=-t+2\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C$

$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 9 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^5\sqrt{x^3+1}$ là hàm số:

(A) $F(x)=\frac{2}{15}\sqrt{\left(x^3+1\right)^5}-\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}+C;$ **(B)** $F(x)=\frac{8}{3}\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3+1}+C;$

(C) $F(x)=\frac{10}{3}\sqrt{\left(x^3+1\right)^5}-2\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}+C;$ **(D)** $F(x)=\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)+C.$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2tdt=3x^2dx.$

Khi đó: $\int f(x)dx=\int x^5\sqrt{x^3+1}dx=\int \left(t^2-1\right).t.\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{3}\int \left(t^4-t^2\right)dt=\frac{2}{3}.\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}.\frac{t^3}{3}+C$

$=\frac{2}{15}\sqrt{\left(x^3+1\right)^5}-\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 10 Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3\ln x-1}{x\ln x}$ là hàm số:

(A) $F(x)=3-\ln(\ln x);$ **(B)** $F(x)=3\ln x-\ln(\ln x)-3;$

(C) $F(x)=\frac{1}{\ln^2 x};$ **(D)** $F(x)=3\ln x+\frac{1}{\ln^2 x}-2.$

Giải:

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \int \frac{3\ln x - 1}{x\ln x}dx = \int \frac{3t-1}{t}dt = \int\left(3 - \frac{1}{t}\right)dt = 3t - \ln|t| + C = 3\ln x - \ln|\ln x| + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

C. Tăng tốc

Bài tập 11 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ là hàm số:

(A) $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| + C$;

(B) $F(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C$;

(C) $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C$;

(D) $F(x) = \ln|\cos x| + C$.

Giải:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx.$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Khi đó:

$$F(x) = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| + \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 12 Tính $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$ được kết quả là:

(A) $I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C$;

(B) $I = \frac{3}{2}\sqrt{(\sin x - \cos x)^3} + C$;

(C) $I = \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$;

(D) $I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x + \cos x)^2} + C$.

Giải:

Đặt $t = \sqrt[3]{\sin x - \cos x} \Rightarrow t^3 = \sin x - \cos x \Rightarrow 3t^2 dt = (\cos x + \sin x)dx$

Khi đó: $I=\int\frac{3t^2dt}{t}=\int 3tdt=3.\frac{t^2}{2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Cần phân biệt giữa $(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}$ và $\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}$ như sau: $(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}$ xác định khi $\sin x-\cos x>0$, còn $\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Bài tập 13 Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG?

(A) Với mọi x thuộc tập xác định thì nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ là hàm số $F(x)=2\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)+C.$

(B) Với mọi x thuộc tập xác định thì nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ là hàm số $F(x)=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}\right)+C.$

(C) Với $x>-2$ thì nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ là hàm số $F(x)=2\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)+C.$

(D) Với $x<-2$ thì nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ là hàm số $F(x)=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}\right)+C.$

Giải:

Xét bài toán: Tính $I=\int f(x)dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}dx.$

Xét hai trường hợp sau đây:

• *Trường hợp 1:* $\begin{cases}x+1>0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-1.$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)dx=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}dx.$

Khi đó: $I=\int\frac{2dt}{t}=2\ln|t|+C=2\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)+C.$

• *Trường hợp 2:* $\begin{cases}x+1<0\\x+2<0\end{cases}\Leftrightarrow x<-2.$

Đặt $t=\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}\Rightarrow dt=\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-x-2}}\right)dx$

$=-\frac{\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}}{2\sqrt{(-x-1)(-x-2)}}dx=-\frac{\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}dx.$

Khi đó: $I=\int\frac{-2}{t}dt=-2\ln|t|+C=-2\ln\left(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x-2}\right)+C.$

$\Rightarrow$ (A), (B), (C) sai; (D) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Các em học sinh dễ nhầm lẫn chỉ xét trường hợp 1 mà không xét trường hợp 2.

Bài tập 14 Tính $I=\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ được kết quả là:

(A) $I=2\sqrt{1+e^{2x}}+C$;

(B) $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C$;

(C) $I=\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right)\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)\right|+C$;

(D) $I=\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}+C}$.

Giải:

Đặt $\sqrt{1+e^{2x}}=t \Rightarrow 1+e^{2x}=t^2 \Rightarrow 2e^{2x}dx=2tdt \Rightarrow e^{2x}dx=tdt$.

Khi đó: $I=\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}}dx=\int \frac{tdt}{\left(t^2-1\right)t}=\int \frac{dt}{t^2-1}=\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$

$=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

D. Về đích

Bài tập 15 Tìm hàm số f(x), biết $f'(x)=\sin^3 x\sqrt{1+\cos x}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}$.

(A) $f(x)=12\sqrt{(1+\cos x)^5}-16\sqrt{(1+\cos x)^3}+\frac{21}{5}$.

(B) $f(x)=2\sqrt{(1+\cos x)^7}-4\sqrt{(1+\cos x)^5}+\frac{11}{5}$.

(C) $f(x)=\frac{2\sqrt{(1+\cos x)^7}}{7}-\frac{4\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5}+\frac{5}{7}$.

(D) $f(x)=3\sin^2 x\sqrt{1+\cos x}-\frac{\sin^4 x}{2\sqrt{1+\cos x}}-\frac{23}{10}$.

Giải:

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \sin^3 x\sqrt{1+\cos x}dx.$

Đặt $t=\sqrt{1+\cos x} \Rightarrow t^2=1+\cos x \Rightarrow 2tdt=-\sin xdx.$

Khi đó: $f(x)=\int \sin^2 x\sin x\sqrt{1+\cos x}dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)\sqrt{1+\cos x}\sin xdx$

$$= -\int\left[1-\left(t^2-1\right)^2\right]t.2tdt = -\int\left(-t^4+2t^2\right)2t^2dt = 2\int\left(t^6-2t^4\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}\right)+C = \frac{2\sqrt{(1+\cos x)^7}}{7}-\frac{4\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5}+C.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{7}-\frac{4}{5}+C=\frac{1}{5} \Leftrightarrow C=\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{(1+\cos x)^7}}{7}-\frac{4\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5}+\frac{5}{7}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn** (C).

Bài tập 16 Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

(A) $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}+C.$

(B) $\int f(x)dx=\frac{2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5}+C.$

(C) $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}+C.$

(D) $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3x^3}\right)+C.$

Giải:

Đặt $t=x+\sqrt{x^2-1} \Rightarrow t-x=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow dx=\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$

Khi đó: $F(x)=\int\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{2.\frac{t^2+1}{2t}.\frac{t^2-1}{2t^2}}{t}dt=\int\frac{t^4-1}{2t^4}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t^4}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{3t^3}\right)+C=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}+C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn** (A).

Chú ý: Có thể giải bằng cách nhân cả tử thức và mẫu thức của f(x) với biểu thức liên hợp của $x+\sqrt{x^2-1}$ là $x-\sqrt{x^2-1}$.

Bài tập 17 Một trong các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ là hàm số:

(A) $F(x)=\ln|x|+4;$

(B) $F(x)=2\ln|x|+2;$

(C) $F(x)=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|;$

(D) $F(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|.$

Giải:

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+4} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx = \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{dt}{t}$

Khi đó: $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Công thức tính nguyên hàm từng phần: $\int u dv = uv - \int v du.$

Bài toán 1: Sử dụng công thức tính nguyên hàm từng phần để xác định $I = \int f(x)dx.$

1. Phương pháp

Thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi tích phân ban đầu về dạng: $I = \int f(x)dx = \int f_1(x)f_2(x)dx.$

- *Bước 2:* Đặt $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_1'(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$

- *Bước 3:* Khi đó: $I = uv - \int v du.$

2. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Tính $I = \int \ln x dx$ được kết quả là:

(A) $I = \frac{1}{x} + C;$ (B) $I = x\ln x - x + C;$

(C) $I = x\ln x + C;$ (D) $I = \frac{\ln x}{x} + C.$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}.$

Khi đó: $I = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 2 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

(A) $\int f(x)dx = x\cot x + C$; (B) $\int f(x)dx = -x\cot x + C$;

(C) $\int f(x)dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C$; (D) $\int f(x)dx = x\tan x + C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x \end{cases}$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn** (C).

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 3 Tìm: $I = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

(A) $I = -\ln(\sin x).\cot x - \cot x - x + C$; (B) $I = -\ln(\sin x).\tan x - \tan x - x + C$;

(C) $I = \ln(\sin x)\cot x + C$; (D) $I = -\ln(\sin x)\tan x + C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có: $I = -\ln(\sin x).\cot x + \int \cot x.\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= -\ln(\sin x).\cot x + \int \cot^2 x dx = -\ln(\sin x).\cot x + \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx$

$= -\ln(\sin x).\cot x - \cot x - x + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn** (A).

Bài tập 4 Cho $I = \int x\ln(1+x)dx$. Nếu đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{cases}$ thì khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) $\begin{cases} du = \frac{1}{1+x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

(B) $I = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx$.

(C) $I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx.$

(D) $I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C.$

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+x)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{1+x}dx\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}.$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có: $I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\int\frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C.$

$\Rightarrow$ Các khẳng định A, B, D đúng; C sai $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

C. Tăng tốc

Bài tập 5 Tìm: $I=\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

(A) $I=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C;$

(B) $I=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C;$

(C) $I=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C;$

(D) $I=\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C.$

Giải:

$I=\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\dv=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\\v=\sqrt{x^2+1}\end{cases}.$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có: $I=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int dx$

$=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 6 Kết quả của phép lấy nguyên hàm $I=\int\sqrt{x^2+a}\,dx$ là:

(A) $I=\frac{x\sqrt{x^2+a}}{2}+\frac{a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{2}+C$; (B) $I=\frac{x\sqrt{x^2+a}}{2}+C$;

(C) $I=\frac{a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{2}+C$; (D) $I=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+a}\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx\\v=x\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$$I=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{\left(x^2+a\right)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=x\sqrt{x^2+a}-I+a.J \qquad (1)$$

Tính: $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+a}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$

$$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}.$$

Do đó: $J=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $I=\frac{x\sqrt{x^2+a}}{2}+\frac{a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{2}+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

D. Về đích

Bài tập 7 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(\ln x)$ là hàm số:

(A) $F(x)=\frac{x\cos(\ln x)}{2}+C$; (B) $F(x)=\frac{x\sin x(\ln x)}{2}+C$;

(C) $F(x)=\frac{x\cos(\ln x)-x\sin(\ln x)}{2}+C$; (D) $F(x)=\frac{x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)}{2}+C$.

Giải:

Tính $F(x)=\int f(x)dx=\int\sin(\ln x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$F(x) = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - J$ (1)

Xét $J = \int \cos(\ln x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ v = x \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$J = x\cos(\ln x) + \int \sin\ln(x)dx = x\cos(\ln x) + I$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I \Leftrightarrow 2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$\Leftrightarrow F(x) = \frac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 8 Một trong các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ là hàm số

(A) $F(x) = -\frac{1}{3x^3}\ln^2 x$;

(B) $F(x) = \frac{-1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$;

(C) $F(x) = -\frac{2}{15x^5}\ln x - \frac{2}{105x^7} + 1$;

(D) $F(x) = 2\frac{\ln^3 x}{x}$.

Giải:

Ta có: $F(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có: $F(x) = -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2J$ (1)

Xét $J = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$J=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$F(x)=-\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}\ln x+C$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài toán 2: Tính $I=\int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

1. Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Đặt $\begin{cases}u=P(x)\\dv=\sin\alpha x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=P'(x)dx\\v=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\end{cases}$.

- *Bước 2:* Khi đó: $I=-\frac{1}{\alpha}P(x)\cos\alpha x+\frac{1}{\alpha}\int P'(x)\cos\alpha x dx$.

- *Bước 3:* Tiếp tục làm như trên ta sẽ khử được đa thức.

2. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)\sin x$ là hàm số:

(A) $F(x)=-(x+1)\cos x+\sin x+C$; **(B)** $F(x)=(x+1)\cos x+\sin x+C$;

(C) $F(x)=-(x+1)\cos x-\sin x+C$; **(D)** $F(x)=(x+1)\cos x-\sin x+C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)\sin x dx$

$=-(x+1)\cos x+\int\cos x dx=-(x+1)\cos x+\sin x+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG, trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

Khẳng định 1: Hàm số $F(x)=-3x\cos\frac{x}{3}+9\sin\frac{x}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số: $f(x)=x\sin\frac{x}{3}$.

Khẳng định 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos(2x+1)$ là hàm số:

$F(x)=\frac{x\sin(2x+1)}{2}+\frac{\cos(2x+1)}{4}+C$.

Khẳng định 3: $\int xe^{2x}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}$.

Khẳng định 4: Tính $I=\int x\ln xdx$ được kết quả là $I=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

Giải:

+ Xét khẳng định 1:

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\sin\frac{x}{3}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=du\\ v=-3\cos\frac{x}{3}\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$\int f(x)dx=-3x\cos\frac{x}{3}+3\int\cos\frac{x}{3}dx=-3x\cos\frac{x}{3}+3.3.\sin\frac{x}{3}+C=-3x\cos\frac{x}{3}+9\sin\frac{x}{3}+C.$

$\Rightarrow$ Khẳng định 1 đúng.

+ Xét khẳng định 2:

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos(2x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{\sin(2x+1)}{2}\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$\int f(x)dx=\frac{x\sin(2x+1)}{2}-\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)dx=\frac{x\sin(2x+1)}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\cos(2x+1)}{2}+C$

$=\frac{x\sin(2x+1)}{2}+\frac{\cos(2x+1)}{4}+C.$

$\Rightarrow$ Khẳng định 2 đúng.

+ Xét khẳng định 3:

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

$\Rightarrow$ Khẳng định 3 sai.

+ Xét khẳng định 4:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$\Rightarrow$ Khẳng định 4 đúng.

$\Rightarrow$ Có tất cả 3 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 3 Tính $I = \int e^x\cos 2xdx$ được kết quả là:

(A) $I = e^x\cos 2x + C$; **(B)** $I = \frac{e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x}{5} + C$;

(C) $I = e^x\sin 2x + C$; **(D)** $I = e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x + C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$I = e^x\cos 2x + 2\int e^x\sin 2xdx = e^x\cos 2x + 2J \qquad (1)$$

Xét $J = \int e^x\sin 2xdx$.

Đặt $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$J = e^x\sin 2x - 2\int e^x\cos 2x = e^x\sin 2x - 2I \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $I = e^x\cos 2x + 2\left(e^x\sin 2x - 2I\right) \Leftrightarrow 5I = e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x}{5} + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 4 Tìm: $I=\int x^2\sin x dx$.

(A) $I=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; **(B)** $I=-x^2\cos x+C$;

(C) $I=-x^2\cos x+x\sin x+\cos x+C$; **(D)** $I=-x^2\sin x+C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\ v=-\cos x\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$I=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=-x^2\cos x+2J \qquad (1)$$

Xét $J=\int x\cos x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$J=x\sin x-\int\sin x dx=x\sin x+\cos x+C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$I=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C)=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 5 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos^2 x$ là hàm số

(A) $F(x)=\dfrac{x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$; **(B)** $F(x)=\dfrac{x\sin 2x}{4}+\dfrac{\cos 2x}{8}+\dfrac{x^2}{4}+C$;

(C) $F(x)=\dfrac{\cos 2x}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$; **(D)** $F(x)=\dfrac{x\sin 2x}{4}+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int x.\left(\dfrac{\cos 2x+1}{2}\right)dx=\dfrac{1}{2}\int x\cos 2x dx+\dfrac{1}{2}\int x dx=\dfrac{1}{2}I+\dfrac{x^2}{4}$ (1)

Xét $I=\int x\cos 2x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \cos 2x dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$I=\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2}+C=\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C\right)+\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x\sin 2x}{4}+\dfrac{\cos 2x}{8}+\dfrac{x^2}{4}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 6 Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số: $f(x)=(x^2+1)e^{2x}$?

$$F(x)=\frac{x^2e^{2x}}{4}-\frac{xe^{2x}}{4}+\frac{3e^{2x}}{8},$$

$$H(x)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{3e^{2x}}{4},$$

$$G(x)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{3e^{2x}}{4}+\frac{e}{3}.$$

(A) $F(x)$; **(B)** $F(x)$ và $H(x)$; **(C)** $F(x)$ và $G(x)$; **(D)** $G(x)$ và $H(x)$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u=x^2+1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$I=\int f(x)dx=\frac{(x^2+1)e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}dx=\frac{(x^2+1)e^{2x}}{2}-J \qquad (1)$$

Xét: $J=\int xe^{2x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$J=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $I=\dfrac{(x^2+1)e^{2x}}{2}-\left(\dfrac{xe^{2x}}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}\right)+C=\dfrac{x^2e^{2x}}{2}-\dfrac{xe^{2x}}{2}+\dfrac{3e^{2x}}{4}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

C. Tăng tốc

Bài tập 7 Kết quả của phép tính $I=\int e^x\cos^2xdx$ là:

(A) $I=\dfrac{1}{10}(5+\cos2x+2\sin2x)e^x+C$; **(B)** $I=e^x\sin2x+C$;

(C) $I=\dfrac{1}{10}(5+\cos2x-2\sin2x)e^x+C$; **(D)** $I=-e^x\sin2x+C$.

Giải:

Ta có: $I=\dfrac{1}{2}\int e^x(1+\cos2x)dx=\dfrac{1}{2}\left(\int e^xdx+\int e^x\cos2xdx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(e^x+\int e^x\cos2xdx\right) \qquad (1)$$

Xét: $J=\int e^x\cos 2x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\cos 2x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin 2x dx\\v=e^x\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có: $J=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x dx$ (2)

Xét: $K=\int e^x\sin 2x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\sin 2x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\cos 2x dx\\v=e^x\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$K=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x dx=e^x\sin 2x-2J$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được: $I=\frac{1}{10}(5+\cos 2x+2\sin 2x)e^x+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 8 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x\cos^2 x$ là hàm số

(A) $F(x)=-\frac{x\cos^3 x}{3}+C$;

(B) $F(x)=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{1}{12}\cos^4 x+C$;

(C) $F(x)=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{\sin x}{3}-\frac{\sin^3 x}{9}+C$;

(D) $F(x)=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{1}{12}\sin^4 x+C$.

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin x\cos^2 x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\int\sin x\cos^2 x dx=-\frac{1}{3}\int d(\cos^3 x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$F(x)=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{1}{3}\int\cos^3 x dx=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{1}{3}\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)+C=-\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{\sin x}{3}-\frac{\sin^3 x}{9}+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

D. Về đích

Bài tập 9 Tính $I=\int x^2(\sin x)^3 dx$ được kết quả là:

(A) $I=x^2\frac{\sin^4 x}{4}+C$;

(B) $I=\frac{3x\sin x}{2}+\frac{3}{2}\cos x-\frac{x\sin 3x}{18}-\frac{1}{54}\cos 3x+C$;

(C) $I = x^2\dfrac{\sin^4 x\cos x}{4} + C$;

(D) $I = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$.

Giải:

Ta có: $I = \int x^2\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}dx = \dfrac{3}{4}\int x^2\sin xdx - \dfrac{1}{4}\int x^2\sin 3xdx$

$= -\dfrac{3}{4}\int x^2 d(\cos x) + \dfrac{1}{12}\int x^2 d(\cos 3x)$

$= -\dfrac{3}{4}x^2\cos x + \dfrac{3}{4}\int \cos xd(x^2) + \dfrac{1}{12}x^2\cos 3x - \dfrac{1}{12}\int \cos 3xd(x^2)$

$= \dfrac{3}{2}\int x\cos xdx - \dfrac{1}{6}\int x\cos 3xdx = \dfrac{3}{2}\int xd(\sin x) - \dfrac{1}{18}\int xd(\sin 3x)$

$= \dfrac{3x\sin x}{2} - \dfrac{3}{2}\int \sin xdx - \dfrac{x\sin 3x}{18} + \dfrac{1}{18}\int \sin 3xdx$

$= \dfrac{3x\sin x}{2} + \dfrac{3}{2}\cos x - \dfrac{x\sin 3x}{18} - \dfrac{1}{54}\cos 3x + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 10 Một trong các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ là hàm số:

(A) $F(x) = \dfrac{e^x\sin x}{1+\cos x} - e$;

(B) $G(x) = \dfrac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}$;

(C) $H(x) = \dfrac{e^x}{1+\cos x}$;

(D) $K(x) = \dfrac{e^x}{(1+\cos x)^2}$.

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}d(e^x) = e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int e^x d\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

$= e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int e^x\dfrac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$= e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int \dfrac{e^x}{1+\cos x}dx - \int \dfrac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$= e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} - J - K$ (1)

Xét $K = \int \dfrac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{-d(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1}{1+\cos x} \end{cases}$

$$\Rightarrow K = \frac{e^x}{1+\cos x} - \int \frac{e^x}{1+\cos x}dx = \frac{e^x}{1+\cos x} - J \qquad (2)$$

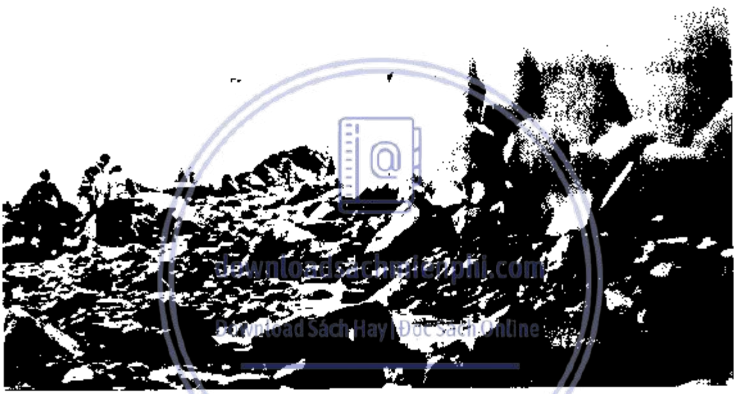
Từ (1) và (2) ta có:

$$\int f(x)dx = e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - J - \left(\frac{e^x}{1+\cos x} - J\right) + C = e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \frac{e^x}{1+\cos x} + C$$

$$= \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Hang động băng Mendenhall, Alaska, Mỹ



Nhắc tới Alaska, người ta không chỉ nghĩ tới những dòng sông băng trải dài bất tận, ẩn giấu trong mình vẻ đẹp kỳ ảo, lôi cuốn mà còn tưởng tượng tới những hang động băng huyền bí và đẹp lung linh. Một trong số đó chính là hang động băng Mendenhall. Nơi đây là một trong những địa điểm mà bất kỳ ai cũng mong muốn được đặt chân tới và tận mắt ngắm nhìn vẻ đẹp kỳ vĩ của tạo hoá. Không chỉ mang một vẻ đẹp thuần túy của thiên nhiên, hang động băng này còn giúp các nhà khoa học có một cái nhìn tổng quát hơn về điều kiện khí hậu trong quá khứ, hiện tại và tương lai của những vùng đất cực bắc nước Mỹ.

CHỦ ĐỀ 2

NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định nguyên hàm các hàm số hữu tỉ ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Phương pháp phân tích
2. Phương pháp đổi biến

1. Phương pháp phân tích

Bằng cách biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân đưa về các dạng nguyên hàm cơ bản.

◆ DẠNG 1: $I = \int \frac{P(x)}{ax+b}dx$, với $a \neq 0$.

Ta cần chú ý công thức: $\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$.

Ví dụ 1 Tính: $I = \int \frac{x-2}{x+1}dx$.

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{(x+1)-3}{x+1}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+1} = x - 3\ln|x+1| + C$.

Ví dụ 2 Tính: $I = \int \frac{x^2-3}{x-1}dx$.

Giải:

$$I = \int \frac{(x^2-1)-2}{x-1}dx = \int (x+1)dx - 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{(x+1)^2}{2} - 2\ln|x-1| + C.$$

Ví dụ 3 Tính: $I = \int \frac{x^3}{x+2}dx$.

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{(x^3+8)-8}{x+2}dx = \int (x^2-2x+4)dx - 8\int \frac{dx}{x+2}$

$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2| + C$.

- DẠNG 2: $I=\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$, với $a\neq 0$.

- *Trường hợp 1:* $f(x)=ax^2+bx+c$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương pháp:

- Khi bậc đa thức P(x) < 2 ta sử dụng phương pháp hệ số bất định.
- Khi bậc P(x) ≥ 2 ta sử dụng phép chia đa thức để đưa tử thức về đa thức có bậc < 2.

Tính: $I=\int \frac{1}{x^2-9}dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{1}{(x-3)(x+3)}dx=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{6}\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right)+C.$

Tính: $I=\int \frac{x}{x^2+5x-6}dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{x}{(x-1)(x+6)}dx=\frac{1}{13}\int\frac{2(x+6)-(x-1)}{(x-1)(x+6)}dx=\frac{1}{13}\left(2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{13}\left(2\ln|x-1|-\ln|x+6|\right)+C=\frac{2}{13}\ln|x-1|-\frac{1}{13}\ln|x+6|+C.$

Tính: $I=\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx=\int xdx+\int\frac{x}{x^2-1}dx$

$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{x^2}{2}+\frac{\ln|x^2-1|}{2}+C.$

- *Trường hợp 2:* $f(x)=ax^2+bx+c$ có nghiệm kép.

Cần lưu ý công thức sau: $\int\frac{u'(x)}{u^2(x)}dx=-\frac{1}{u(x)}+C.$

Phương pháp: Để tránh phức tạp khi biến đổi ta thường đặt $t=\alpha x+\beta$.

Tính: $I=\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{dx}{(x-3)^2}=-\frac{1}{x-3}+C.$

Ví dụ 8 • Tính: $I=\int \frac{3x}{x^2-2x+1}dx.$

Giải:

Cách 1: Ta có:

$$I=\int \frac{3x}{(x-1)^2}dx=3\int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}dx=3\int\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx=3\left(\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right)+C.$$

Cách 2: Đặt $t=x-1\Rightarrow dt=dx.$

Khi đó: $I=\int \frac{3(t+1)}{t^2}dt=3\int\frac{dt}{t}+3\int\frac{dt}{t^2}=3\ln|t|-\frac{3}{t}+C=3\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C.$

Ví dụ 9 • Tính: $I=\int \frac{x^2-6}{x^2-4x+4}dx.$

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{(x^2-4x+4)+(4x-10)}{x^2-4x+4}dx=\int dx+\int\frac{4x-10}{x^2-4x+4}dx=x+J.$

Tính: $J=\int\frac{4x-10}{x^2-4x+4}dx.$

Ta có: $J=\int\frac{4x-10}{(x-2)^2}dx=\int\frac{4(x-2)-2}{(x-2)^2}dx=\int\frac{4}{x-2}dx-2\int\frac{dx}{(x-2)^2}$

$=4\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C.$

- ***Trường hợp 3:*** $f(x)=ax^2+bx+c$ vô nghiệm.

+ *Phương pháp:*

- *Bước 1:* Phân tích $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right].$
- *Bước 2:* Đặt $x+\frac{b}{2}=\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\tan t.$

Ta cần lưu ý cách tính nguyên hàm: $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$ bằng cách đặt $x=a\tan t$.

Ví dụ 10 • Tính: $I=\int\frac{dx}{x^2-2x+2}.$

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}.$

Đặt $x-1=\tan t\Rightarrow dx=(\tan^2 t+1)dt.$

Khi đó: $I=\int\frac{\tan^2 t+1}{\tan^2 t+1}dt=\int dt=t+C=\arctan(x-1)+C.$

- DẠNG 3: $I = \int \frac{P(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, với $a \neq 0$.

- ***Trường hợp 1:*** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 1 nghiệm bội 3.

Ta cần chú ý công thức: $\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$.

Ví dụ 11 • Tính: $I = \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$.

Ví dụ 12 • Tính: $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^3}dx$.

Giải:

Cách 1: Ta có: $x^3 = (x-1)^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (x-1)^3 + 3x(x-1) + 1$

$= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$.

Do đó: $I = \int \frac{(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^3}dx = \int \left[1 + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right]dx$

$= x + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$.

Cách 2: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{(t+1)^3}{t^3}dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^3}dt = \int \left(1 + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right)dt$

$= t + 3\ln|t| - \frac{3}{t} - \frac{1}{2t^2} + C = x - 1 + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$.

- ***Trường hợp 2:*** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 nghiệm.

Ví dụ 13 • Tính: $I = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx$.

Giải:

Đặt $x + 1 = t \Rightarrow dx = dt$.

Khi đó: $I = \int \frac{dt}{t^2(t-2)}$.

Dùng phương pháp hệ số bất định:

Giả sử: $\frac{1}{t^2(t-2)} = \frac{At + B}{t^2} + \frac{C}{t-2} \Rightarrow 1 = (A+C)t^2 + (-2A+B)t - 2B$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B=0 \\ -2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Khi đó: $I=-\frac{1}{4}\int\frac{t+2}{t^2}dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-2}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-2}$

$=-\frac{1}{4}\left(\ln|t|-\frac{2}{t}\right)+\frac{1}{4}\ln|t-2|+C=-\frac{1}{4}\left[\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}\right]+\frac{1}{4}\ln|x-1|+C$

$=\frac{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{4}+\frac{1}{2(x+1)}+C.$

- ***Trường hợp 3:*** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 14 ♦ Tính: $I=\int\frac{1}{(x^2-1)x}dx.$

Giải:

Giả sử: $\frac{1}{(x^2-1)x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow 1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$

$\Leftrightarrow 1=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó:

$I=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$

- ***Trường hợp 4:*** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có 1 nghiệm (khác bội 3)

Phương pháp:

- *Bước 1:* Phân tích: $ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(Ax^2+Bx+C)$
- *Bước 2:* Đồng nhất thức $\frac{P(x)}{ax^3+bx^2+cx+d}=\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{b_1x+c_1}{Ax^2+Bx+C}$

Ví dụ 15 ▸ Tính: $I=\int\frac{2x^2-3x+5}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

Giải:

Giả sử: $\frac{2x^2-3x+5}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+5=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+5=(A+B)x^2+(B+C)x+A+C$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+B=2\\B+C=-3\\A+C=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=5\\B=-3.\\C=0\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\frac{5}{x+1}dx-\int\frac{3x}{x^2+1}dx=5\ln|x+1|-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$=5\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x^2+1|+C.$

2. Phương pháp đổi biến

◆ **DẠNG 1:** $\int\frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^n}dx.$

Giải:

Đặt $t=cx+d.$

Ví dụ 16 ◆ Tính: $I=\int\frac{(3x-1)^3}{(x+1)^2}dx.$

Giải:

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx.$

Khi đó: $I=\int\frac{(3t-6)^3}{t^2}dt=27\int\frac{t^3-6t^2+12t-8}{t^2}dt=27\int\left(t-6+\frac{12}{t}-\frac{8}{t^2}\right)dt$

$=27.\frac{t^2}{2}-27.6t+27.12\ln|t|+27.8.\frac{1}{t}+C=\frac{27}{2}t^2-162t+324\ln|t|+\frac{216}{t}+C.$

◆ **DẠNG 2:** $\int\frac{x^{k-1}.P(x^k)}{Q(x^k)}dx.$

Giải:

Đặt $t=x^k.$

Ví dụ 17 Tính: $I=\int\frac{x^2}{x^6-1}dx$.

Giải:

Đặt $x^3=t\Rightarrow 3x^2dx=dt$.

Khi đó: $I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\frac{1}{6}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+C.$

II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3x^2-2x-1}$ là hàm số:

(A) $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C$;

(B) $F(x)=3\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C$;

(C) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+C$;

(D) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x-1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\frac{dx}{(x-1)(3x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{(3x+1)-3(x-1)}{(x-1)(3x+1)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{3x+1}$

$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|3x+1|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2 Tính $I=\int\frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$ thu được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(x^2-1\right)+C$;

(B) $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(x^2-1\right)+C$;

(C) $I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|+C$;

(D) $I=\frac{1}{4\sqrt{2}\tan\left(x^2-1\right)}+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^2-2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2-2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Chú ý: Ta có thể trình bày bài toán tường minh hơn bằng việc đổi biến số trước khi áp dụng các công thức (1), (2). Cụ thể:

$I=\int\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^2-2}.$

Đặt $t=x^2-1\Rightarrow dt=2xdx.$

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|+C.$

Bài tập 3 Một trong số các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}$ là hàm số

(A) $F(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$;

(B) $F(x)=\ln|x|-\frac{1}{x+1}$;

(C) $F(x)=-\frac{\ln|x|}{x+1}$;

(D) $F(x)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}$.

Giải:

Biến đổi: $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1.\\C=-1\end{cases}$

Khi đó:

$\int f(x)dx=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Chú ý: Ta cũng có thể trình bày theo cách đặt $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$.

Khi đó: $I = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + \frac{1}{t} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$

Bài tập 4 Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ là hàm số:

(A) $F(x) = -\frac{\ln|x-1|}{x} + C;$

(B) $F(x) = \ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C;$

(C) $F(x) = -\frac{1}{x} + \ln|x-1| + C;$

(D) $F(x) = 2\ln|x| - \ln|x-1| + C.$

Giải:

Biến đổi: $1 = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - (x-1)(x+1)$

Khi đó: $I = \int \frac{x^2 - (x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

$= \ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 5 Tính $I = \int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx$ thu được kết quả là:

(A) $I = \frac{x^2}{2} + 3x + 3\ln|x| - \frac{1}{x} + C;$

(B) $I = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + C;$

(C) $I = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C;$

(D) $I = \frac{(x-1)^2}{2} + C.$

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx.$

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx.$

Khi đó: $I = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt$

$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 6 Tính $I=\int \frac{x^2+2x-3}{x^2-2}dx$ thu được kết quả là

(A) $I=x+\ln\left|x^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$; (B) $I=x+\ln\left|x^2-2\right|-\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$;

(C) $I=\ln\left|x^2-2\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$; (D) $I=x+\ln\left|x^2-1\right|-\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\left(1+\frac{2x-1}{x^2-2}\right)dx=\int dx+\int\frac{2xdx}{x^2-2}-\int\frac{dx}{x^2-2}$

$=x+\int\frac{d\left(x^2-2\right)}{x^2-2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2}}\right)dx$

$=x+\ln\left|x^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{d\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}-\int\frac{d\left(x+\sqrt{2}\right)}{x+\sqrt{2}}\right]$

$=x+\ln\left|x^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|x-\sqrt{2}\right|-\ln\left|x+\sqrt{2}\right|\right)+C$

$=x+\ln\left|x^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 7 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{7x-13}{x^2-4x+5}$ là hàm số

(A) $F(x)=-7\ln\left|\cos x\right|+x+C$;

(B) $H(x)=7\ln\left|\sqrt{1+(x-2)^2}\right|+\arctan(x-1)+C$;

(C) $G(x)=7\ln\left|\sin x\right|+x+C$;

(D) $H(x)=7\ln\left[1+(x-2)^2\right]+\arctan x+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{7x-13}{(x-2)^2+1}dx$.

Đặt $x-2=\tan t\Rightarrow dx=\left(\tan^2 t+1\right)dt$.

Khi đó: $I=\int(7\tan t+1)dt=7\int\tan tdt+\int dt=-7\int\frac{d(\cos t)}{\cos t}+t=-7\ln\left|\cos t\right|+t+C$

$H(x)=7\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1+(x-2)^2}}\right|+\arctan(x-2)+C=7\ln\left|\sqrt{1+(x-2)^2}\right|+\arctan(x-2)+C$;

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 8 Tính $I=\int \frac{xdx}{x^2-6x-7}$ thu được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x-7\right|+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C$; (B) $I=\frac{x}{8}\ln\left|\frac{x+1}{x-7}\right|+C$;

(C) $I=\ln\left|x^2-6x-7\right|+3\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C$; (D) $I=\frac{x^2}{2}-\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{(x-3)+3}{(x-3)^2-16}dx=\int\frac{x-3}{(x-3)^2-16}dx+3\int\frac{dx}{(x-3)^2-16}$

$=\frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^2-16\right|+3.\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-3-4}{x-3+4}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x-7\right|+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Chú ý: Nhiều bài toán phải qua một số phép biến đổi mới xác định được dạng của nguyên hàm. Ta xét ví dụ sau đây:

Bài tập 9 Tính $I=\int\frac{x^3dx}{x^4-2x^2-3}$ thu được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-2x^2-2\right|+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+1}\right|+C$; (B) $I=\frac{1}{2}\ln\left|x^4-2x^2-2\right|+C$;

(C) $I=\frac{1}{2}\ln\left|x^4-2x^2-2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+1}\right|+C$; (D) $I=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{x^3dx}{(x^2-1)^2-4}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)^2-4}d(x^2-1)$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-4}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-4}$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ln\left|(x^2-1)^2-3\right|+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1-2}{x^2-1+2}\right|+C$

$=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-2x^2-2\right|+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 10 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$. Một trong các nguyên hàm của hàm số f(x) là hàm số:

(A) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2\left(x^2+1\right)\right|$;

(B) $G(x)=2\ln\left|x^2\left(x^2+1\right)\right|+1$;

(C) $H(x)=\ln|x|-\ln\left|x^2+1\right|+2$;

(D) $K(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|-4$.

Giải:

$$\int f(x)dx=\int\frac{xdx}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)d\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2}-\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2\right|-\ln\left|x^2+1\right|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right|+C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Đối với tích phân có dạng $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)^m}$ ta lưu ý cách đặt ẩn phụ như sau:

Giải:

- *Bước 1:* Nhân tử số và mẫu số với x^{n-1}.
- *Bước 2:* Đặt $t=ax^n+b$.

C. Tăng tốc

Bài tập 11 Có bao nhiêu khẳng định SAI trong các khẳng định sau đây?

(A) 3; (B) 1; (C) 2; (D) 0.

Khẳng định 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\left(3x^2-2x-1\right)^2}$ là hàm số:

$$F(x)=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{x-1}\right|-\frac{3}{4(3x-1)}+C.$$

Khẳng định 2: Tính $I=\displaystyle\int\frac{x+1}{x^3-1}dx$ được kết quả $I=\dfrac{2}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+C$.

Khẳng định 3: Hàm số $F(x)=\dfrac{\ln\left|x^3-2\right|}{6}-\dfrac{\ln\left|x^3+1\right|}{12}$ là một nguyên hàm của hàm số:

$f(x)=\dfrac{x^5}{x^6-x^3-2}$.

Khẳng định 4: $\displaystyle\int\frac{x}{x^3-3x+2}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|+C$.

Giải:

+ Xét khẳng định 1:

Ta có: $I=\int \frac{dx}{(x-1)^2(3x+1)^2}$.

Ta có:

$$\frac{1}{(x-1)^2(3x-1)^2}=\frac{\left[(3x-1)-3(x-1)\right]^2}{4(x-1)^2(3x-1)^2}=\frac{(3x-1)^2-6(3x-1)(x-1)+9(x-1)^2}{4(x-1)^2(3x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)(3x-1)}+\frac{9}{4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(3x-1)-3(x-1)}{(x-1)(3x-1)}\right]+\frac{9}{4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{3x-1}\right)+\frac{9}{4(3x-1)^2}$$

Khi đó: $I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{3dx}{3x-1}+\frac{9}{4}\int\frac{dx}{(3x-1)^2}$

$$=-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|3x-1|-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}+C$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{x-1}\right|-\frac{3}{4(3x-1)}+C.$$

$\Rightarrow$ Khẳng định 1 đúng.

+ Xét khẳng định 2:

Ta có: $\frac{x+1}{x^3-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{x+1}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow x+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+B=0\\A-B+C=1\\A-C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\B=-\frac{2}{3}\\C=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$

$=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|+C.$

$\Rightarrow$ Khẳng định 2 đúng.

+ Xét khẳng định 3:

Đặt $t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx.$

Khi đó: $I=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{t^2-t-2}=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t+1)(t-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{2(t+1)-(t-2)}{(t+1)(t-2)}dt$

$=\frac{1}{12}\left(2\int\frac{dt}{t-2}-\int\frac{dt}{t+1}\right)=\frac{1}{6}\ln|t-2|-\frac{1}{12}\ln|t+1|+C$

$=\frac{\ln|x^3-2|}{6}-\frac{\ln|x^3+1|}{12}+C.$

$\Rightarrow$ Khẳng định 3 đúng.

+ Xét khẳng định 4:

Ta có: $I=\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x-2)}.$

Đặt $t=x-1 \Rightarrow dt=dx.$

Khi đó: $I=\int\frac{t+1}{t^2(t-1)}dt.$

Ta có: $\frac{t+1}{t^2(t-1)}=\frac{At+B}{t^2}+\frac{C}{t-1} \Leftrightarrow \frac{t+1}{t^2(t-1)}=\frac{(At+B)(t-1)+Ct^2}{t^2(t-1)}$

$\Leftrightarrow t+1=(A+C)t^2+(B-A)t-B$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+C=0\\B-A=1\\-B=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2\\B=-1\\C=-2\end{cases}.$

Khi đó: $I=\int\frac{2t-1}{t^2}dt-2\int\frac{dt}{t-1}=2\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}-2\int\frac{dt}{t-1}=2\ln|t|+\frac{1}{t}-2\ln|t-1|+C$

$=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|+C.$

$\Rightarrow$ Khẳng định 4 đúng.

$\Rightarrow$ Không có khẳng định nào sai

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 12 Tính $I=\int\frac{dx}{x^4+4}$ được kết quả là:

$I=\frac{1}{m}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{n}\arctan(x-1)+\frac{1}{p}\arctan(x+1)+C.$ Khi đó, m + n − p bằng:

(A) 0; **(B)** 8; **(C)** 16; **(D)** 12.

Giải:

Ta có: $\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{(x^2+2)^2-4x^2}=\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

Giả sử: $1=(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2-2x+2)$

$\Leftrightarrow 1=(A+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+2(A+B+C-D)x+2B+2D$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+C=0\\2A+B-2C+D=0\\A+B+C-D=0\\2B+2D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{8}\\B=\frac{1}{4}\\C=\frac{1}{8}\\D=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Khi đó: $\frac{1}{x^4+4}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x+2}{x^2+2x+2}$

$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}$

Do đó: $I=\int\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}\right)dx$

$=\frac{1}{16}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\left[\arctan(x-1)+\arctan(x+1)\right]+C$

$\Rightarrow m=16;\ n=p=8\Rightarrow m+n-p=16+8-8=16\Rightarrow$ Chọn (B).

Bài tập 13 Tìm $I=\int\frac{x^4-2}{x^3-x}dx$.

(A) $I=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$; (B) $I=1+2\ln\left|\frac{x}{x^2-1}\right|+C$;

(C) $I=1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$; (D) $I=1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$.

Giải:

Ta có: $\frac{x^4-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}=x+\frac{x^2-2}{x(x-1)(x+1)}$

$=x+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)}$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+B+C=1\\B-C=0\\-A=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-\frac{1}{2}\\C=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $\dfrac{x^4-2}{x^3-x}=x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó: $I=\int\left(x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\dfrac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x+1|\right)+C$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$.

$\Rightarrow$ Chọn (A).

Bài tập 14 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^7}{x\left(1+x^7\right)}$.

(A) $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{2}{7}\ln|x+1|+C$;

(B) $\int f(x)dx=\ln|x|-\dfrac{2}{7}\ln\left|x^7+1\right|+C$;

(C) $\int f(x)dx=\ln|x|-2\ln|x+1|+C$;

(D) $\int f(x)dx=7\ln|x|-2\ln\left|x^7+1\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\dfrac{\left(1-x^7\right)x^6}{x^7\left(1+x^7\right)}dx$.

Đặt $t=x^7\Rightarrow dt=7x^6dx$.

Khi đó: $I=\dfrac{1}{7}\int\dfrac{1-t}{t(1+t)}dt$.

Ta có: $\dfrac{1-t}{t(1+t)}=\dfrac{1}{t(1+t)}-\dfrac{t}{t(1+t)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t+1}$

Khi đó: $I=\dfrac{1}{7}\int\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t+1}\right)dt=\dfrac{1}{7}\int\dfrac{dt}{t}-\dfrac{2}{7}\int\dfrac{dt}{t+1}=\dfrac{1}{7}\ln|t|-\dfrac{2}{7}\ln|t+1|+C$

$=\ln|x|-\dfrac{2}{7}\ln\left|x^7+1\right|+C$.

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Bài tập 15 Tính $I=\int\dfrac{\left(x^4-1\right)dx}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)}$ được kết quả là:

(A) $I=\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$;

(B) $I=\dfrac{1}{5}\ln|x(x+1)|+C$;

(C) $I=\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right|+C$;

(D) $I=5\ln\left|\dfrac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{(x^4-1)dx}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$.

Đặt $t=x^5-5x\Rightarrow dt=(5x^4-5)dx=5(x^4-1)dx$

Khi đó: $I=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t(t+1)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{5}(\ln|t|-\ln|t+1|)+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C$

$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 16 Tính $I=\int\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)(x^2+2x+1)}dx$ thu được kết quả là

(A) $I=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right|+C$;

(B) $I=\frac{1}{3}\left|(x^2-x+1)(x^2+2x+1)\right|+C$;

(C) $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$;

(D) $I=\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right|+C$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\left(x+2+\frac{1}{x}\right)}dx.$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

Khi đó: $I=\int\frac{dt}{(t-1)(t+2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right|+C$

$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+2}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Đối với tích phân có dạng $\int\frac{(Ax^2\pm C)}{(Ax^2+B_1x\mp C)(Ax^2+B_2x\mp C)}dx$ ta lưu ý cách đặt ẩn phụ như sau:

Giải:

- *Bước 1:* Chia cả tử và mẫu cho x^2.

- *Bước 2:* Đặt $\left[\begin{array}{l}t=Ax+\frac{C}{x}\\ t=Ax-\frac{C}{x}\end{array}\right.$.

D. Về đích

Bài tập 17 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ là hàm số

(A) $F(x)=\dfrac{1}{4}\left[\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$

(B) $F(x)=\dfrac{1}{4}\left[\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arccot}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arccot}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$

(C) $F(x)=\dfrac{1}{4}\left[\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$

(D) $F(x)=\dfrac{1}{4}\left[\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\operatorname{arccot}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arccot}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$

Giải:

Ta có: $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^2-x^2}=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}.$

Giả sử: $\dfrac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow 1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow 1=(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+B+D$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+C=0\\-A+B+C+D=0\\A-B+C+D=0\\B+D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=\dfrac{1}{2}\\C=-\dfrac{1}{2}\\D=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Khi đó: $I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\left(\frac{2x+2}{x^2+x+1}-\frac{2x-2}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 18 Tính $I=\int \frac{dx}{x^6+1}$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+C.$

(B) $I=\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C.$

(C) $I=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C.$

(D) $I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C.$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{x^6+1}=\frac{x^2+1-x^2}{x^6+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2}{x^6+1}=J-K.$

Tính: $K=\int\frac{x^2}{x^6+1}dx.$

Ta có: $K=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1}=\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)+C$

Tính $J=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}.$

Ta có: $\frac{1}{x^4-x^2+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2-3x^2}=\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)}$

Giả sử: $1=\left(Ax+B\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A+C=0\\A\sqrt{3}+B-C\sqrt{3}+D=0\\A+B\sqrt{3}+C-D\sqrt{3}=0\\B+D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\B=\frac{1}{2}\\C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\\D=\frac{1}{2}\end{cases}.$

Khi đó: $\frac{1}{x^4-x^2+1}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}$

$=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right]$

Do đó: $I = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C.$

Vậy $I = -\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{2}\left[\arctan\left(2x+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 19 Kết quả của phép tính $I = \int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x+1}dx$ là:

(A) $I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}\right|+C;$ **(B)** $I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C;$

(C) $I = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C;$ **(D)** $I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right|+C.$

Giải:

Ta có: $I = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-2}dx.$

Đặt $t = x+\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

Khi đó: $I = \int\frac{dt}{t^2+t-2} = \int\frac{dt}{(t-1)(t+2)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right|+C$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+2}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 20 Trong các hàm số sau, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^6-1}$?

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$, $H(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}$,

$G(x) = \sqrt{3}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}+3.$

(A) $F(x)$; **(B)** $G(x)$ và $K(x)$;

(C) $G(x)$ và $H(x)$; **(D)** $H(x)$ và $K(x)$.

Giải:

Ta có: $\frac{x^4+x^2-1}{x^6-1}=\frac{x^4-1}{x^6-1}+\frac{x^2}{x^6-1}=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}+\frac{x^2}{x^6-1}$

Khi đó: $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx+\int\frac{x^2}{x^6-1}dx=J+K.$

Tính: $J=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}+C$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$

Tính: $K=\int\frac{x^2}{x^6-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2-1}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+C$

Vậy $I=J+K=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+C$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Ngọn núi Roraima
nằm giữa Venezuela, Brazil và Guyana

Ngọn núi có đỉnh bằng kỳ lạ Roraima là ngọn núi có đỉnh bằng cao nhất và nổi tiếng nhất Venezuela, đồng thời ngọn núi này được xem như là biên giới giữa ba quốc gia Venezuela, Brazil và Guyana. Ngọn núi thuộc địa phận Vườn Quốc Gia Canaima với diện tích của toàn khu vực là 30.000km², là nơi chứa và tạo ra nhiều địa chất lâu đời nhất thế giới; có niên đại vào khoảng 2 tỷ năm trước.

NGUYÊN HÀM CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xác định nguyên hàm các hàm lượng giác ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau:

1. Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản.

2. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa về các nguyên hàm cơ bản.

3. Phương pháp đổi biến.

4. Phương pháp nguyên hàm từng phần.

1 Sử dụng các dạng nguyên hàm cơ bản

1.1. Phương pháp

Chủ yếu sử dụng phương pháp phân tích để xác định nguyên hàm của các hàm số lượng giác.

1.2. Các dạng nguyên hàm

◆ **DẠNG 1:** Tính: $I=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

a) Phương pháp

Biến đổi: $I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln\left|\sin(x+b)\right|-\ln\left|\sin(x+a)\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.$$

Chú ý: Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các nguyên hàm sau:

1. $I=\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$. 2. $I=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

b) Ví dụ

Tính: $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

Giải:

Ta có: $I = \frac{1}{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x\right]} \int \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x\right]}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\cos x}{\sin x} dx - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln|\sin x| - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + C$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}\right| + C$.

DẠNG 2. Tính $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin a}$

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi I về dạng $I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\frac{x+a}{2} \cos\frac{x-a}{2}}$.

- *Bước 2:* Áp dụng bài toán 1 để giải tiếp.

Chú ý: Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các nguyên hàm sau:

1. $I = \int \frac{dx}{\sin x + b}$ với $|b| \le 1$.

2. $I=\int \frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

3. $I=\int \frac{dx}{\cos x+b}$, với $|b|\le 1$.

b) Ví dụ

Ví dụ 2. Tính: $I=\int \frac{dx}{2\cos x+1}$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{dx}{2\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x+\cos \frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{4\sin\left(\frac{3x+\pi}{6}-\frac{3x-\pi}{6}\right)}\int \frac{\sin\left(\frac{3x+\pi}{6}-\frac{3x-\pi}{6}\right)}{\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\sin\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}-\sin\frac{3x-\pi}{6}\cos\frac{3x+\pi}{6}}{\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\int \frac{\sin\frac{3x+\pi}{6}}{\cos\frac{3x+\pi}{6}}dx-\int \frac{\sin\frac{3x-\pi}{6}}{\cos\frac{3x-\pi}{6}}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-\int \frac{d\left(\cos\frac{3x+\pi}{6}\right)}{\cos\frac{3x+\pi}{6}}+\int \frac{d\left(\cos\frac{3x-\pi}{6}\right)}{\cos\frac{3x-\pi}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[-\ln\left|\cos\frac{3x+\pi}{6}\right|+\ln\left|\cos\frac{3x-\pi}{6}\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\cos\frac{3x-\pi}{6}}{\cos\frac{3x+\pi}{6}}\right|+C.$$

◆ **DẠNG 3:** Tính nguyên hàm: $I=\int \tan x\tan\left(x+a\right)dx$.

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi I về dạng:

$$I=\int\frac{\sin x\sin\left(x+a\right)}{\cos x\cos\left(x+a\right)}dx$$

$$=\int\left[\frac{\cos x\cos\left(x+a\right)+\sin x\sin\left(x+a\right)}{\cos x\cos\left(x+a\right)}-1\right]dx$$

$$=\int\frac{\cos a}{\cos x\cos\left(x+a\right)}dx-\int dx=\cos a\int\frac{dx}{\cos x\cos\left(x+a\right)}-x.$$

- *Bước 2:* Áp dụng bài toán 1 để giải tiếp.

Chú ý: Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng nguyên hàm sau:

1. $I=\int\tan\left(x+a\right)\cot\left(x+b\right)dx$
2. $I=\int\cot\left(x+a\right)\cot\left(x+b\right)dx$.

b) Ví dụ

Tính: $I=\int\cot x\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx=\int\left[\frac{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-1\right]dx$

$$=\int\left[\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-1\right]dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-\int dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C.$$

◆ **DẠNG 4:** Tính: $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.

a) Phương pháp

Ta có thể lựa chọn 1 trong 2 cách biến đổi:

Cách 1: $I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\alpha\right)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{2\sin\frac{x+\alpha}{2}.\cos\frac{x+\alpha}{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{2\tan\frac{x+\alpha}{2}\cos^2\frac{x+\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\left(\tan\frac{x+\alpha}{2}\right)}{\tan\frac{x+\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C.$$

Cách 2: Ta có: $I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin^2(x+\alpha)}dx$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\left[\cos(x+\alpha)\right]}{\cos^2(x+\alpha)-1}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\cos(x+\alpha)-1}{\cos(x+\alpha)+1}\right|+C.$$

Chú ý: Ta có thể thực hiện bằng cách đổi biến $t=\tan\frac{x}{2}$.

b) Ví dụ

Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\frac{2}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int\frac{2dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\int\frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\int\frac{dx}{2\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\int\frac{d\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|+C.$$

◆ **DẠNG 5:** Tính $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$.

a) Phương pháp

Biến đổi: $a_1\sin x+b_1\cos x=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)$

Khi đó: $I=\int\frac{A\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

$$=A\int dx+B\int\frac{a_2\cos x-b_2\sin x}{a_2\sin x+b_2\cos x}=Ax+B\ln\left|a_2\sin x+b_2\cos x\right|+C.$$

b) Ví dụ

Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\frac{3\sin x+5\cos x}{\sin x+2\cos x}$.

Giải:

Biến đổi: $3\sin x+5\cos x=A\left(\sin x+2\cos x\right)+B\left(\cos x-2\sin x\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin x+5\cos x=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}A-2B=3\\2A+B=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{13}{5}\\B=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{\frac{13}{5}(\sin x+2\cos x)+\frac{1}{5}(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}$

Do đó: $F(x)=\int\left(\dfrac{13}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}\right)dx=\dfrac{13}{5}\int dx+\dfrac{1}{5}\int\dfrac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}$

$=\dfrac{13}{5}x+\dfrac{1}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$

◆ **DẠNG 6: Tính** $I=\int\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a_2\sin x+b_2\cos x)^2}dx.$

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Biến đổi: $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\cos x-b_2\sin x)$

- *Bước 2:* Khi đó: $I=\int\dfrac{A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\cos x-b_2\sin x)}{(a_2\sin x+b_2\cos x)^2}dx$

$=A\int\dfrac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x}+B\int\dfrac{a_2\cos x-b_2\sin x}{(a_2\sin x+b_2\cos x)^2}dx$

$=\dfrac{A}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}}\int\dfrac{dx}{\sin(x+\alpha)}-\dfrac{B}{a_2\sin x+b_2\cos x}$

$=\dfrac{A}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}}\ln\left|\tan\dfrac{x+\alpha}{2}\right|-\dfrac{B}{a_2\sin x+b_2\cos x}+C$

Trong đó: $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{b_2}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}}\\\cos\alpha=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}}\end{cases}$.

b) Ví dụ

Ví dụ 6 ◆ Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\dfrac{4\cos x}{2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x}$.

Giải:

Ta có: $f(x)=\dfrac{4\cos x}{3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x}=\dfrac{4\cos x}{(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2}$.

Biến đổi: $4\cos x=A(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+B(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow 4\cos x = \left(A\sqrt{3} - B\right)\sin x + \left(A + B\sqrt{3}\right)\cos x$$

Đồng nhất đẳng thức ta được:

$$\begin{cases} A\sqrt{3} - B = 0 \\ A + B\sqrt{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Khi đó: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2}$.

Do đó: $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + \sqrt{3}\int \frac{d\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} + C.$$

◆ **DẠNG 7:** Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

a) Phương pháp

Ta xét 3 khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{1}{c\left[1 + \cos(x - \alpha)\right]} = \frac{1}{2c}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}}, \text{ trong đó: } \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}.$$

Khi đó: $I = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\int \frac{d\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\tan\frac{x-\alpha}{2} + C.$

Khả năng 2: Nếu $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$, ta thực hiện phép biến đổi:

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x + c} = -\frac{1}{c\left[1 - \cos(x - \alpha)\right]} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x-\alpha}{2}},$$ trong đó: $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

Khi đó: $$I = \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\int \frac{d\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x-\alpha}{2}} = \frac{1}{c}\cot\frac{x-\alpha}{2} + C.$$

Khả năng 3: Nếu $c^2 \neq a^2 + b^2$, ta thực hiện phép đổi biến $t = \tan t$. Khi đó:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

b) Ví dụ

Ví dụ 7 • Tính: $I = \int \frac{dx}{3\sin x - \cos x + 1}$.

Giải:

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, ta có: $dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Khi đó:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{dt}{t^2+3t} = \int \frac{dt}{t(t+3)} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right| + C.$$

• **DẠNG 8:** Tính: $I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx$.

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi:

$$a_1\sin x + b_1\cos x + c_1 = A\left(a_2\sin x + b_2\cos x + c_2\right) + B\left(a_2\cos x - b_2\sin x\right) + C$$

- *Bước 2:* Khi đó: $$I = \int \frac{A\left(a_2\sin x + b_2\cos x + c_2\right) + B\left(a_2\cos x - b_2\sin x\right) + C}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx$$

$$= A\int dx + B\int \frac{a_2\cos x - b_2\sin x}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}dx + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}.$$

Trong đó: $\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$ được xác định nhờ dạng 4.

b) Ví dụ

Ví dụ 8 • Tính: $I=\int \frac{6\sin x}{3\sin x-\cos x+1}dx.$

Giải:

Biến đổi: $6\sin x = A(3\sin x-\cos x+1)+B(3\cos x+\sin x)+C$

$\Leftrightarrow 6\sin x=(3A+B)\sin x+(-A+3B)\cos x+A+C$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases}3A+B=6\\-A+3B=0\\A+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{9}{5}\\B=\frac{3}{5}\\C=-\frac{9}{5}\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\frac{9}{5}dx+\frac{3}{5}\int\frac{3\cos x+\sin x}{3\sin x-\cos x+1}dx-\frac{9}{5}\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x+1}$

$=\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}\ln|3\sin x-\cos x+1|-\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|$

$=\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}\ln|3\sin x-\cos x+1|-\frac{3}{5}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C.$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã nhận kết quả trong *Ví dụ 7* là:

$$\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x+1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C.$$

• **DẠNG 9:** Tính: $I=\int\frac{a_1\sin^2x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx.$

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi:

$a_1\sin^2x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x=(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C(\sin^2x+\cos^2x)$

- *Bước 2:* Khi đó: $I=\int\frac{(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

$=\int(A\sin x+B\cos x)dx+C\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x}$

$$= -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$= -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C$$

Trong đó $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \end{cases}$.

b) **Ví dụ**

Ví dụ 9 Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{5\sin^2 x + 1}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$.

Giải:

Biến đổi: $5\sin^2 x + 1 = (A\sin x + B\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 5\sin^2 x + 1 = (A+C)\sin^2 x + (A\sqrt{3} + B)\sin x\cos x + (B\sqrt{3} + C)\cos^2 x$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} A + C = 5 \\ A\sqrt{3} + B = 0 \\ B\sqrt{3} + C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\sqrt{3} \\ C = 4 \end{cases}$.

Khi đó:

$$f(x) = \frac{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + 4}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = \sin x - \sqrt{3}\cos x + \frac{4}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}.$$

Do đó: $F(x) = \int(\sin x - \sqrt{3}\cos x)dx + 4\int\dfrac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$

$$= -\cos x - \sqrt{3}\sin x + 4.\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| + C = -\cos x - \sqrt{3}\sin x + 2\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| + C$$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã sử dụng kết quả ở ví dụ 4 là:

$$\int\frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = \frac{1}{2}.\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| + C.$$

◆ **DẠNG 10:** Tính: $I = \displaystyle\int\frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$.

a) Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Biến đổi I về dạng: $I = \displaystyle\int\frac{dx}{(a\tan^2 x + b\tan x + c)\cos^2 x}$

- *Bước 2:* Thực hiện phép đổi biến:

$$t = \tan x \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \\ \dfrac{dx}{\left(a\tan^2 x + b\tan x + c\right)\cos^2 x} = \dfrac{dt}{at^2 + bt + c} \end{cases}$$

Khi đó: $I = \int \dfrac{dt}{at^2 + bt + c}$.

b) Ví dụ

Ví dụ 10 ♦ Tính: $I = \int \dfrac{dx}{5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Giải:

Ta có: $I = \int \dfrac{dx}{\left(5\tan^2 x - 4\tan x - 1\right).\cos^2 x} = \dfrac{1}{5}\int \dfrac{d(\tan x)}{\left(\tan x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}\int \dfrac{d\left(\tan x - \frac{2}{5}\right)}{\left(\tan x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}}$

$= 2\ln\left|\dfrac{\tan x - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}}{\tan x - \frac{2}{5} + \frac{1}{5}}\right| + C = 2\ln\left|\dfrac{\tan x - \frac{3}{5}}{\tan x - \frac{1}{5}}\right| + C.$

♦ **DẠNG 11: Tính:** $I = \int \dfrac{\sin x\cos x}{\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)^\alpha}dx.$

***a)* Phương pháp**

Ta có: $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}.d\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)$

Ta đi xét 2 khả năng của α như sau:

Khả năng 1: $\alpha = 1$, ta được: $I = \dfrac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\int \dfrac{d\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

$= \dfrac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right) + C.$

Khả năng 2: $\alpha \neq 1$, ta được: $I = \dfrac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\int \dfrac{d\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)}{\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)^\alpha}$

$= \dfrac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)(1-\alpha)}\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)^{1-\alpha} + C.$

b) Ví dụ

Ví dụ 11 Tính: $I=\int\frac{\sin x\cos x}{\left(3\sin^2 x+5\cos^2 x\right)^3}dx.$

Giải:

$$I=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(3\sin^2 x+5\cos^2 x\right)}{\left(3\sin^2 x+5\cos^2 x\right)^3}=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left(3\sin^2 x+5\cos^2 x\right)^2}+C$$

$$=\frac{1}{8\left(3\sin^2 x+5\cos^2 x\right)^2}+C.$$

2. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản

Phương pháp: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng quen thuộc. Các phép biến đổi thường dùng bao gồm:

- Phép biến đổi tích thành tổng.
- Hạ bậc.
- Các kỹ thuật biến đổi khác.

2.1. Sử dụng phép biến đổi tích thành tổng

Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

Ví dụ 1 Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x\sin 4x$.

Giải:

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta được:

$$\sin 2x\sin 4x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 6x).$$

Khi đó: $F(x)=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

Chú ý: Nếu hàm f(x) là tích của nhiều hơn 2 hàm số lượng giác ta thực hiện phép biến đổi dần, cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2 Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\sin 2x\cos x\cos 3x$.

Giải:

Sử dụng các công thức biến đổi tổng thành tích, ta được:

$$\sin 2x\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin x)\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 3x\cos 3x+\sin x\cos 3x)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x)\right]=\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x+\sin 4x)$$

Khi đó:

$$F(x)=\frac{1}{4}\int(\sin 6x-\sin 2x+\sin 4x)dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+C.$$

2.2. Sử dụng phép hạ bậc

Ở đây chúng ta nhớ lại các công thức sau:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$ $$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$ $$\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Ví dụ 3 Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\cos^3 x\cos x$.

Giải:

Sử dụng công thức hạ bậc, ta có:

$$f(x)=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}.\cos x=\frac{3}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos x$$

$$=\frac{3}{8}(\cos 2x+1)+\frac{1}{8}(\cos 4x+\cos 2x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{3}{8}$$

Khi đó: $F(x)=\int\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{3}{8}\right)dx=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}.\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{3}{8}x+C$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{3}{8}x+C.$$

2.3. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác khác nhau

Phương pháp: Ngoài việc vận dụng một cách linh hoạt các công thức biến đổi lượng giác thì việc định hướng các phép biến đổi rất quan trọng.

Ví dụ 4 Tính: $I=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=\ln|\sin x-\cos x|+C$.

Ví dụ 5 Tính: $I=\int(\sin^3 x\cos x+\sin x\cos^3 x)dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int \sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)dx=\frac{1}{2}\int \sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Lưu ý: Các tích phân dạng $\int \sin^m x\cos^n xdx$ với m, n là các số nguyên có thể được tính nhờ các phép biến đổi hoặc dùng các công thức hạ bậc.

3. Phương pháp đổi biến

Phương pháp: Tính $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ trong đó R là hàm hữu tỉ.

Khi đó:

- Nếu $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ thì có thể sử dụng phép đổi biến là: $t=\cos x$.

- Nếu $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ thì có thể sử dụng phép đổi biến là: $t=\sin x$.

- Nếu $R(-\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ thì có thể sử dụng phép đổi biến là: $t=\tan x$ hoặc $t=\cot x$.

- Có thể đưa về nguyên hàm các hàm hữu tỉ bằng phép đổi biến $t=\tan\frac{x}{2}$.

Ví dụ 6 Tính: $I=\int \frac{\sin x+\sin x\cos x}{3+\cos x}dx$.

Giải:

Ta có: $I=\int \frac{(1+\cos x)\sin x}{3+\cos x}dx$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.

Khi đó: $I=-\int \frac{1+t}{3+t}dt=-\int \frac{3+t-2}{3+t}dt=-\int\left(1-\frac{2}{3+t}\right)dt$

$=-t+2\ln|3+t|+C=-\cos x+2\ln(3+\cos x)+C$.

Nhận xét: Ở ví dụ trên ta thấy $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ nên định hướng được phép đổi biến $t=\cos x$.

4. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Phương pháp: Chúng ta đã được biết trong vấn đề: Xác định nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, đối với các dạng nguyên hàm:

◆ DẠNG 1: Tính $\int P(x)\sin\alpha x dx$ hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$ với P(x) là đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ và $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Khi đó ta đặt: $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos\alpha x dx \end{cases}$

◆ DẠNG 2: Tính: $\int e^{ax}\cos bx dx$ hoặc $\int e^{ax}\sin bx dx$ với $a, b \neq 0$. Khi đó ta đặt: $\begin{cases} u = \cos bx \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = \sin bx \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}$.

Ví dụ 7 ◆ Tính: $I = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó: $I = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1 Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2\frac{x}{2}$ là:

(A) $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C$;

(B) $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$;

(C) $F(x) = x - \sin x + C$;

(D) $F(x) = x + \sin x + C$.

Giải:

Ta có: $F(x) = \int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 2 Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

(A) $\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$;

(B) $\int f(x)dx = \frac{\tan^6 x}{6} + C$;

(C) $\int f(x)dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$;

(D) $\int f(x)dx = \frac{\cot^6 x}{6} + C$.

Giải:

Ta có: $F(x)=\int \tan^5 xdx$.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(\tan^2 x+1)dx=(t^2+1)dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{t^2+1}$

Khi đó: $F(x)=\int \frac{t^5}{t^2+1}dt=\int \frac{t^3(t^2+1)-t(t^2+1)+t}{t^2+1}dt$

$=\int t^3dt-\int tdt+\int \frac{tdt}{t^2+1}=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{\ln(t^2+1)}{2}+C$

$=\frac{\tan^4 x}{4}-\frac{\tan^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 3 Tính $I=\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$ thu được kết quả là:

(A) $I=\frac{3}{4}x+\frac{\cos 4x}{16}+C;$

(B) $I=\frac{\sin^5 x+\cos^5 x}{5}+C;$

(C) $I=\frac{\sin^5 x-\cos^5 x}{5}+C;$

(D) $I=\frac{3}{4}x+\frac{\sin 4x}{16}+C.$

Giải:

Ta có: $I=\int\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]dx=\int\left(1-\frac{\sin^2 2x}{2}\right)dx$

$=\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=x-\frac{1}{4}\left(\int dx-\int\cos 4xdx\right)=x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$

$=\frac{3}{4}x+\frac{\sin 4x}{16}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 4 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ là hàm số

(A) $F(x)=\arctan(1+\sin^2 x)+C;$

(B) $F(x)=\text{arccot}(1+\sin^2 x)+C;$

(C) $F(x)=\tan(1+\sin^2 x)+C;$

(D) $F(x)=\cot(1+\sin^2 x)+C.$

Giải:

Đặt $t=1+\sin^2 x \Rightarrow dt=2\sin x\cos xdx=\sin 2xdx.$

Khi đó: $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t+C=\arctan(1+\sin^2 x)+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 5 Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$.

(A) $\int f(x)dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$;
(B) $\int f(x)dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$;
(C) $\int f(x)dx = 2\sin x - 4\sin^3 x + C$;
(D) $\int f(x)dx = 2\cos x - 4\cos^3 x + C$.

Giải:

Ta có: $F(x) = \int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Khi đó: $F(x) = \int (1 - t^2)t^2 dt = \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 6 Tính $I = \int \cos^3 x \sin 6x dx$ thu được kết quả là:

(A) $I = -\frac{1}{64}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 6x - \frac{3}{32}\cos 4x + C$.

(B) $I = -\frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 6x - \frac{3}{32}\sin 4x + C$.

(C) $I = -\frac{1}{64}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{3}{32}\cos 4x + C$.

(D) $I = -\frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 6x - \frac{3}{32}\sin 4x + C$.

Giải:

Sử dụng công thức hạ bậc: $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$, ta có:

$$I = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} . \sin 5x dx = \frac{1}{4}\int \cos 3x \sin 5x dx + \frac{3}{4}\int \cos x \sin 5x dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\sin 8x + \sin 2x)dx + \frac{3}{8}\int (\sin 6x + \sin 4x)dx$$

$$= -\frac{1}{8}.\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{8}.\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{8}.\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{3}{8}.\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

$$= -\frac{1}{64}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 6x - \frac{3}{32}\cos 4x + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 7 Tính $I = \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$ thu được kết quả là

$I = \frac{1}{m}\sin 6x + \frac{1}{n}\sin 4x + \frac{1}{p}\sin 2x + \frac{1}{q}x + C$.

Khi đó m + n + p + q bằng

(A) 52; **(B)** 13; **(C)** 14; **(D)** 28.

Giải:

Biến đổi: $\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\cos 3x=\frac{1}{2}\cos^2 3x+\frac{1}{2}\cos x\cos 3x$

$=\frac{1}{4}(\cos 6x+1)+\frac{1}{4}(\cos 4x+\cos 2x)=\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1)$

Khi đó: $I=\frac{1}{4}\int\cos 6x dx+\frac{1}{4}\int\cos 4x dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x dx+\frac{1}{4}\int dx$

$=\frac{1}{4}.\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}x+C$

$=\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{4}x+C.$

$\Rightarrow m+n+p+q=24+16+8+4=52\Rightarrow$ **Chọn (A).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 8 Tính $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\cos x-\sin x}$ được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C;$ **(B)** $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C;$

(C) $I=\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C;$ **(D)** $I=\sqrt{2}\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C.$

Giải:

Ta có: $\sqrt{2}+\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]$

$=\sqrt{2}\left[1+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$

Khi đó: $I=\int\frac{dx}{2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 9 Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}$ là hàm số:

(A) $F(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C;$ **(B)** $F(x)=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x-\cos x|+C;$

(C) $F(x)=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C;$ **(D)** $F(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\ln|\sin x-\cos x|+C.$

Giải:

Biến đổi: $\sin x-\cos x=A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)$

$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x$

Đồng nhất thức hai vế ta được:

$$\begin{cases}A-2B=1\\2A+B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{5}\\B=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

Khi đó: $\int f(x)dx=-\dfrac{1}{5}\int dx-\dfrac{3}{5}\int\dfrac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 10 Tính $I=\int\dfrac{dx}{\cos^3 x}$ được kết quả là

(A) $I=-\dfrac{1}{4(\sin x-1)}-\dfrac{1}{4}\ln|\sin x-1|+\dfrac{1}{2}\ln|\sin x+1|-\dfrac{1}{4(\sin x+1)}+C.$

(B) $I=-\dfrac{1}{4(\cos x-1)}-\dfrac{1}{4}\ln|\cos x-1|+\dfrac{1}{2}\ln|\cos x+1|-\dfrac{1}{4(\cos x+1)}+C.$

(C) $I=-\dfrac{1}{\sin x-1}-\ln|\sin x-1|+2\ln|\sin x+1|-\dfrac{1}{\sin x+1}+C.$

(D) $I=-\dfrac{1}{\cos x-1}-\ln|\cos x-1|+2\ln|\cos x+1|-\dfrac{1}{\cos x+1}+C.$

Giải:

- *Cách 1:* Ta có: $I=\int\dfrac{\cos xdx}{\cos^4 x}=\int\dfrac{\cos xdx}{(1-\sin^2 x)^2}.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx.$

Khi đó: $I=\int\dfrac{dt}{(1-t^2)^2}=\dfrac{1}{4}\int\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)^2dt=\dfrac{1}{4}\int\left[\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{2}{(1-t)(1+t)}+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right]dt$

$=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dt}{(t-1)^2}+\dfrac{1}{4}\int\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)dt+\dfrac{1}{4}\int\dfrac{1}{(1+t)^2}dt$

$=-\dfrac{1}{4(t-1)}-\dfrac{1}{4}\ln|t-1|+\dfrac{1}{4}\ln|t+1|-\dfrac{1}{4(t+1)}+C$

$=-\dfrac{1}{4(\sin x-1)}-\dfrac{1}{4}\ln|\sin x-1|+\dfrac{1}{4}\ln|\sin x+1|-\dfrac{1}{4(\sin x+1)}+C.$

- *Cách 2:* Ta có: $I=\int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{\cos x} \\ dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \\ v=\tan x \end{cases}$.

Khi đó: $I=\frac{\tan x}{\cos x}-\int\frac{\tan x\sin x}{\cos^2 x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$

$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\int\frac{1}{\cos^3 x}dx+\int\frac{1}{\cos x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\int\frac{1}{\cos x}dx$

$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|$

$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\sin x-1}\right|$

$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\sin x-1}\right|\right)+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 11 Cho F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Vậy F(x) là

(A) $F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x$;

(B) $F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x+\frac{4}{3}$;

(C) $F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x+\frac{1}{3}$;

(D) $F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x-\frac{1}{3}$.

Giải:

Ta có:

$F(x)=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{1}{\cos^4 x}dx+4\int\frac{1}{\sin^2 2x}dx$

$=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx+2\int\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=\int(\tan^2 x+1)d(\tan x)-2\cot 2x$

$=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x+C.$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\frac{4}{3}+C=1\Leftrightarrow C=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}.$

$\Rightarrow F(x)=\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-2\cot 2x-\frac{1}{3}.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 12 Tính $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$ được kết quả là:

(A) $I=\sin x+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|-\frac{1}{\sin x-1}+C.$ (B) $I=\cos x-\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{1}{\cos x-1}+C.$

(C) $I=\cos x+\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{1}{\cos x-1}+C.$ (D) $I=\sin x-\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|-\frac{1}{\sin x-1}+C.$

Giải:

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.

Khi đó: $I=\int\frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt=\int\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^2dt=\int\left(\frac{t^2-1+1}{1-t^2}\right)^2dt=\int\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)^2dt$

$=\int\left[1-\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\right]dt=\int\left[1-\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{(t-1)^2}\right]dt$

$=t+\ln|t-1|-\ln|t+1|-\frac{1}{t-1}+C=\cos x+\ln|\cos x-1|-\ln|\cos x+1|-\frac{1}{\cos x-1}+C$

$=\cos x+\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{1}{\cos x-1}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

C. Tăng tốc

Bài tập 13 Tính $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x-3\cos^2 x}$ thu được kết quả là:

(A) $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+3}\right|+C;$ (B) $I=\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+3}\right|+C;$

(C) $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cot x-1}{\cot x+3}\right|+C;$ (D) $I=\ln\left|\frac{\cot x-1}{\cot x+3}\right|+C.$

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2\tan x-3}=\int\frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2\tan x-3}$

$=\int\frac{d(\tan x)}{(\tan x-1)(\tan x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\tan x-1}-\frac{1}{\tan x+3}\right)d(\tan x)$

$=\frac{1}{4}\int\frac{d(\tan x-1)}{\tan x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(\tan x+3)}{\tan x+3}=\frac{1}{4}\ln|\tan x-1|-\frac{1}{4}\ln|\tan x+3|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+3}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 14 Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

(A) $I=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$;

(B) $I=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$;

(C) $I=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$;

(D) $I=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$.

Giải:

Cách 1: Ta có: $\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}.\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\sqrt{2}.\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$

Khi đó: $I=\sqrt{2}\int\frac{\cos x}{\sin x}dx-\sqrt{2}\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\sqrt{2}\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}-\sqrt{2}\int\frac{d\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\sqrt{2}\ln|\sin x|-\sqrt{2}\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C.$

Cách 2: Ta có: $I=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\sin x(\sin x+\cos x)}=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x(1+\cot x)}$

$=-\sqrt{2}\int\frac{d(\cot x)}{1+\cot x}=-\sqrt{2}\int\frac{d(1+\cot x)}{1+\cot x}=-\sqrt{2}\ln|1+\cot x|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Căn cứ vào đặc điểm của hàm dưới dấu tích phân mà ta linh hoạt lựa chọn phương pháp giải cho hợp lí nhất.

Bài tập 15 Gọi F(x) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$ sao cho F(x) bị triệt tiêu tại $x=\frac{\pi}{6}$. Khi đó:

(A) $F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(B) $F(x)=\frac{1}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(C) $F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(D) $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Giải:

Biến đổi: $\cos^2x=(A\sin x+B\cos x)(\sin x+\sqrt{3}\cos x)+C(\sin^2x+\cos^2x)$

$\Leftrightarrow \cos^2x=(A+C)\sin^2x+(A\sqrt{3}+B)\sin x\cos x+(B\sqrt{3}+C)\cos^2x$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases}A+C=0\\A\sqrt{3}+B=0\\B\sqrt{3}+C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{4}\\B=\frac{\sqrt{3}}{4}\\C=\frac{1}{4}\end{cases}$

Khi đó: $F(x)=\int\frac{\left(-\frac{1}{4}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos x\right)(\sin x+\cos x)+\frac{1}{4}}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$

$=\int\left(-\frac{1}{4}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos x\right)dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$

$=\frac{1}{2}\int\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\frac{1}{2}\int\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)d\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\int\frac{d\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|+C.$

Ta có: $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right|+C=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{8}.0+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

D. Về đích

Bài tập 16 Kết quả của phép tính $I=\int\frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{2\cos^2-1}$ là:

(A) $I=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C;$

(B) $I=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|+C;$

(C) $I=\frac{\sin x}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C;$

(D) $I=\frac{\sin x}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{\left(1+\sin^2 x\right)\sin x}{2\cos^2 x-1}dx=\int\frac{\left(2-\cos^2 x\right)\sin x}{2\cos^2 x-1}dx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx.$

Khi đó: $I=-\int\frac{\left(2-t^2\right)dt}{2t^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\left(2t^2-1\right)-3}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}$

$=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}t-1}-\frac{1}{\sqrt{2}t+1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{d\left(\sqrt{2}t-1\right)}{\sqrt{2}t-1}-\int\frac{d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\sqrt{2}t+1}\right)$

$=\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 17 Tìm một nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin 2x}$, biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.$

(A) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)}.$

(B) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)}+\frac{5}{2\sqrt{2}}.$

(C) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)}-\sqrt{2}.$

(D) $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx.$

Biến đổi: $\cos x=A(\sin x+\cos x)+B(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow \cos x=(A-B)\sin x+(A+B)\cos x$

Đồng nhất thức hai vế ta được:

$$\begin{cases}A-B=0\\A+B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2(\sin x+\cos x)}+C.$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 18 Một trong các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin 2x-2\cos x}$ là hàm số

(A) $F(x)=-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{1-\cos x}+\ln\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right|\right);$

(B) $F(x)=-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{1-\sin x}-\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\right)-2;$

(C) $F(x)=-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{1-\sin x}+\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\right)-\frac{3}{2};$

(D) $F(x)=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1-\sin x}-\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\right).$

Giải:

Ta có: $I=\int\frac{dx}{2\cos x(\sin x-1)}=\int\frac{\cos x\,dx}{2\cos^2 x(\sin x-1)}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)(\sin x-1)}$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx$.

MỤC LỤC

Vấn đề 1
NGUYÊN HÀM

Vấn đề 2
TÍCH PHÂN